

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЙ ВРАЩЕНИЯ ДИСКОВЫХ ГАЛАКТИК

© 2022 А. Меса^{1*}, А. А. Липовка¹

¹Факультет физических исследований, Университет Сонора, 83000, Эрмосильо Сонора, Мексика

Поступила в редакцию 20 сентября 2021; после доработки 13 декабря 2021; принята к публикации 11 февраля 2022

Настоящая работа предлагает точное решение уравнения Пуассона, которое нечасто применяется для расчета гравитационного потенциала дисковых галактик. Мы предлагаем аналитическое решение задачи в цилиндрической системе координат с использованием метода конечных интегральных преобразований. Окончательное решение представлено в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Функция Грина в задаче построена для произвольной функции распределения плотности вещества в галактике. На основании полученных результатов мы предлагаем выражение для кривой вращения. В качестве примера в данной работе предлагаются расчеты для кривой вращения Галактики.

Ключевые слова: *методы: численные — галактики: дисковые — гравитация*

1. ВВЕДЕНИЕ

В самых разнообразных сферах практического применения в астрофизике существует множество чрезвычайно важных задач, которые можно свести к задаче Пуассона в цилиндрических координатах (Kellogg 1967). Эти задачи возникают при моделировании галактик, аккреционных дисков и так далее, когда нас интересует восстановление гравитационного потенциала рассматриваемого объекта по наблюдательным данным. В качестве примера следует упомянуть метод определения толщины дисковой галактики путем решения уравнения Пуассона (см. Binney and Tremaine (2008), Burch and Cowsik (2013), Casertano (1983), Ferreras (2019), Gaensler et al. (2008), Gonzalez and Reina (2016), Hu et al. (2007), Jog (1999), Junqueira et al. (2013), Kostov (2006), Ninković (2015), Peng (1988), Peng et al. (1979), Reina-Medrano et al. (2018), Toomre (1963), Zhao et al. (2006), Zhao et al. (2004)).

Известно, что гравитационная сила образует векторное поле: в каждой точке пространства ускорение пробной частицы однозначно описывается вектором. Гравитационный потенциал — это скалярная функция, дающая такое же количество информации, как и векторное поле. Если мы запишем отклонение силы относительно скалярного потенциала, то придем к уравнению гравитационного поля. Как известно, это уравнение Пуассона (Binney and Tremaine 2008).

Этот вопрос об изучении гравитационного потенциала для цилиндрического распределения с

целью решения задачи для дисковой галактики рассматривался по-разному.

Toomre (1963) представил математический метод расчета равновесного распределения масс в очень плоской симметричной самогравитирующей системе (например, в галактическом диске) для произвольного закона вращения.

В работе Zhao et al. (2004) был предложен метод определения толщины безграничного диска галактик по наблюдаемой структуре спиральных рукавов, основанный на решении трехмерного уравнения Пуассона для логарифмического возмущения плотности.

Hu et al. (2007) сочли необходимым произвести возмущение общей нестационарной функции плотности и положить $z = 0$.

Аналогично, используя последовательный отклик осесимметричного галактического диска, возмущенного постоянным ($m = 1$) потенциалом гало, Jog (1999) показал, что собственная гравитация диска играет решающую роль в определении асимметричного распределения вещества в диске.

В нашей статье мы анализируем квазистационарный случай, позволяющий найти решение для потенциала без необходимости введения возмущений для общей функции плотности в отличие от работ Hu et al. (2007) и Jog (1999).

Burch and Cowsik (2013) рассчитали суммарный гравитационный потенциал барионной и темной составляющих материи. Они промоделировали компоненты диска как двойные экспоненциальные функции. В цилиндрических координатах балдж описывается профилем плотности Пламмера. В

*E-mail: a216230056@unison.mx

своей работе они решали уравнение Пуассона численно и итерационно. Они приняли полиномиальное разложение Лежандра, чтобы получить плотность и гравитационный потенциал для барионной и темной материи по отдельности и для суммы двух компонентов.

В отличие от работы Burch and Cowsik (2013), мы предлагаем обобщенную функцию плотности, компоненты которой позволяют в общем случае моделировать балдж и диск галактики без необходимости отдельного рассмотрения каждого компонента.

Casertano (1983) построил кривую вращения галактики NGC 5907. В своей работе он построил кривую вращения с помощью двухкомпонентной модели с использованием плавного сферического распределения «темной массы» (гало) и компонента для диска галактики. Для своего исследования Казертано произвел усечение диска спиральной галактики. Такая процедура предполагает резкое уменьшение светимости, наблюдаемое во внешних частях некоторых галактик, видимых с ребра, касательно интерпретации кривых скоростей, наблюдаемых и сравниваемых в его статье. Из-за усечения диска на кривой вращения появляется особенность в виде области почти постоянной скорости с последующим резким уменьшением скорости сразу за усечением. Эта характеристика совпала с наблюдаемой кривой вращения галактики NGC 5907. Это является недостатком, так как в этом случае граничные условия не могут быть применены к общему случаю в цилиндрических координатах.

Мы не усекали функцию распределения плотности для диска галактики, как было сделано в работе Казертано. Вместо этого мы использовали произвольную функцию плотности вещества, заданную в цилиндрических координатах, и наши граничные условия не были усечены, поскольку нашей целью было создание обоснованного и универсального метода изучения гравитационного потенциала и кривых вращения дисковых галактик.

Gonzalez and Reina (2016) получили гравитационный потенциал путем суммирования двух независимых членов: потенциала, связанного с тонким диском, и потенциала, связанного со сфероидальным гало, который выражается в виде подходящей суперпозиции произведений функций Лежандра, так что модель подразумевает линейную зависимость между массами тонкого диска и сфероидального гало.

Следует подчеркнуть, что в данной работе функция плотности представляет собой произвольное аналитическое выражение. При этом его преимущество, в отличие, например, от данного в статье Gonzalez and Reina (2016), состоит в том, что в нем используется не суперпозиция специальных

функций, а гравитационный потенциал, который ничем не ограничен и не является частным случаем.

Zhao et al. (2006) предложили решение трехмерного уравнения Пуассона для осесимметричного диска. Решение уравнений найдено для галактической плоскости в предположении, что высота диска равна нулю ($z = 0$). В соответствии с этим предположением они решали уравнение Пуассона с помощью преобразования Лапласа (для координаты z) и преобразования Фурье (для координаты ϕ).

В нашей работе предлагается решение уравнения Пуассона методом конечных интегральных преобразований; он разработан для двумерного случая (для координат r и z), но мы изначально не предполагаем, что толщина галактического диска равна нулю ($z \neq 0$).

Junqueira et al. (2013) предложили описание возмущенного гравитационного потенциала спиральных галактик со спиральными рукавами, имеющими профили гауссовой формы в виде борозд.

Недавно в работе Ninković (2015) была предложена новая формула для гравитационного потенциала плоских систем. На самом деле она является модификацией потенциала Миямото–Нагаи, и ее следует применять к очень уплощенным системам, например, экспоненциальным дискам. Итоговая кривая вращения достаточно хорошо согласуется с кривой, полученной с помощью специальных функций, и суммарные массы остаются прежними. Функции, входящие в добавленный в формулу новый член, могут улучшить сглаживание кривой вращения, а также уменьшить влияние отрицательных значений плотности, которые появляются за пределами срединной плоскости.

Kostov (2006) промоделировал спиральную галактику. Был использован тонкий осесимметричный диск, включающий как видимую, так и темную материю. Плотность поверхностной массы диска рассчитывалась непосредственно по кривой скорости вращения без дополнительных допущений. Стандартное применение модели было упрощено. Поскольку большинство кривых скоростей известны до некоторого радиуса, r_{\max} , они были экстраполированы путем присоединения кеплеровского хвоста.

Метод решения уравнения Пуассона для различных спиральных возмущений плотности в трехмерных спиральных галактиках, а также решения представлены также в статье Peng (1988). Аналогично, Peng et al. (1979) получили решение уравнения Пуассона для дисков конечной толщины, взяв решение бесконечно тонких дисков в качестве функции Грина.

К сожалению, все эти решения имеют дело с очень частными случаями функции распределения плотности (случаи, когда $z = 0$ для функции плотности, возмущенные функции плотности,

очень частные функции плотности (что ограничивает методы), разные функции плотности для каждого компонента галактики, возмущенный гравитационный потенциал, условия с усеченными границами, бесконечно тонким или сплюснутым диском) среди прочих. По этой причине существуют некоторые ограничения в применении этих моделей к реальным галактикам. Модель Пенга (Peng (1988) и Peng et al. (1979)), например, основана на распределении плотности Паренаго (Peng 1988) вдоль z -направления $\rho_h(z) \sim e^{-\alpha|z|}$ (предполагают, что функция распределения плотности может быть факторизована, то есть $\rho(r, \phi, z) = \rho_\sigma(r, \phi)\rho_h(z)$). Но эту функцию нельзя считать удовлетворительным выбором, так как 1) она не имеет определенной производной на плоскости галактики $z = 0$ и 2) она получена из барометрической формулы, предполагающей (в термализованном случае) наличие постоянной гравитационной массы для $z < 0$.

Как можно видеть, это не совсем правильно в случае галактики, где гравитационный потенциал определяется в конкретной точке распределением плотности, которое, в свою очередь, не следует выводить из барометрического соотношения. По этим причинам упомянутая выше модель нуждается в обобщении.

Gaensler et al. (2008) представили анализ одновременно мер дисперсии пульсаров и диффузного излучения $\text{H}\alpha$ в Млечном Пути; на его основе получены плотность, давление и коэффициент заполнения компонента толстого диска теплой ионизированной среды как функция высоты над галактическим диском.

McGaugh et al. (2016) сообщили о корреляции между наблюдаемым радиальным ускорением, определяемым по кривым вращения, и ускорением, которое следует из распределения барионов. Обнаружено, что корреляция сохраняется даже тогда, когда доминирует темная материя. На этом основании авторы заключили, что вклад темной материи полностью определяется вкладом барионов. В связи с этим McGaugh and Schombert (2015) также оценили звездные массы дисковых галактик двумя независимыми методами: фотометрически последовательным соотношением цвета, массы и светимости по моделям популяционного синтеза и с помощью барионного соотношения Талли—Фишера, откалиброванного для богатых газом галактик. Такое обнаружение позволяет заключить, что светимость в ближнем инфракрасном диапазоне является хорошим индикатором звездной массы. В космологии ожидается, что барионное соотношение Талли—Фишера покажет значительное рассеяние, возникающее из соотношения «масса—концентрация» гало темной материи и отношения массы барионов к массе гало (Lelli et al. 2015).

В упомянутой выше работе (а также в работах тех же авторов Lelli et al. (2016a) и McGaugh and Schombert (2015)) была проанализирована скорость вращения дисковых галактик. Особый интерес представляла плоская часть кривой вращения. Эти авторы показали, что существует связь между барионным распределением массы и формой кривой вращения.

При анализе кривых вращения можно заметить, что чем больше размер галактики (больше ее масса), тем быстрее будет скорость ее вращения. Недостатком работ (Lelli et al. 2016a, McGaugh and Schombert 2015) является то, что балдж-компонент дисковой галактики должен рассматриваться отдельно.

Кривые вращения выводятся как функция распределения вещества. Lelli et al. (2016a) и McGaugh and Schombert (2015) разложили барионную модель на два компонента, балдж и диск, а в нашей работе мы представляем единую функцию плотности, учитывающую оба эти компонента.

Из уравнения Пуассона для сферического компонента можно вывести скорость вращения в галактической плоскости. Эта скорость индуцируется i -й барионной компонентой.

Banerjee and Jog (2007) объединили уравнение гидростатического равновесия, обусловленного силой тяжести, действующей на газ, и уравнение Пуассона в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) . Расчеты производились в приближении тонкого диска для трехкомпонентной модели галактического диска, состоящего из гравитационно связанных звезд и газа. Благодаря этому они получили распределение плотности i -го компонента для любого радиуса. Они представили гравитирующий изотермический звездный диск в галактике с вертикальным распределением плотности, которое определяется выражением $\rho(z) = \rho_0 \text{sech}^2(z/z_0)$, где константа z_0 выражается через среднюю плотность ρ_0 на плоскости $z = 0$. Путем численного решения системы уравнений гидростатического равновесия и уравнений Пуассона они нашли значение дисперсии вертикальной скорости $\langle v^2 \rangle$. Авторы утверждают, что дисперсия постоянна по высоте, что свидетельствует в пользу модели изотермического диска.

Система уравнений гидростатического равновесия и уравнений Пуассона решалась авторами численно методом Рунге—Кутты четвертого порядка, методом итераций. При этом для плоскости диска были заданы следующие граничные условия (Banerjee and Jog 2007):

$$\rho_i|_{z=0} = (\rho_0)_i, \quad \frac{d\rho_i}{dz}|_{z=0} = 0.$$

Однако модифицированная плотность плоскости диска $(\rho_0)_i$ для каждого компонента неизвестна априори. Следовательно, требуемое значение $(\rho_i)_0$ можно определить только методом проб и ошибок, что в итоге приводит к распределению $(\rho_i)_0$ (Banerjee and Jog 2007).

В нашей работе, помимо того, что предлагаемая нами функция плотности уникальна, как было сказано выше, мы решаем уравнение Пуассона аналитически, не прибегая к численным или итерационным методам. Кроме того, наша плотность z также не требует определения методом проб и ошибок. Все это представляет собой преимущество по сравнению с вышеупомянутой работой Banerjee and Jog (2007).

Основная цель данной работы — разработка универсального аналитического метода расчета потенциала и кривой вращения для произвольного аналитически заданного распределения плотности вещества. Учитывая, что аналитическое решение может быть получено для любого произвольного распределения вещества, рассматриваемый нами метод не имеет ограничений и может быть использован для расчета потенциалов и кривых вращения любых галактик с любым распределением как барионной, так и темной материи.

Для полноты картины нужно упомянуть также попытки расчета гравитационного потенциала и поля скоростей звезд в присутствии темной материи, предпринятые в работах Banerjee and Jog (2007), Bertin et al. (1977), Kun et al. (2017), Lelli et al. (2015; 2016a), Lelli et al. (2016b), McGaugh et al. (2016), McGaugh and Schombert (2015), McGaugh et al. (2000).

Здесь же следует упомянуть работу Kondratiev (1982), в которой впервые было получено общее выражение для потенциала эллиптической галактики, состоящей из неоднородного эллипсоида, слои равной плотности которого образуют семейство коаксиальных, но не взаимно подобных эллипсоидов.

Однако в нашей работе речь идет об обобщенном потенциале массы для любого распределения плотности. Учитывая именно то, что решение может быть получено для любого произвольного распределения материи, рассматриваемый нами метод не имеет ограничений и может быть использован для моделирования любой галактики с любым распределением барионной и темной материй. Основной целью данной работы является разработка универсального метода. Это важно, поскольку можно использовать любую функцию распределения; впоследствии можно найти кривую вращения, которая соблюдает эту общность метода.

По этим причинам становится ясной необходимость точного аналитического решения уравнения

Пуассона для гравитационного потенциала тонкого сплюснутого эллипсоида, характеризующегося более сложной функцией распределения плотности.

До настоящего времени решения задачи Пуассона были предложены для довольно небольшого класса функций распределения плотности. Цель настоящей работы — восполнить этот пробел и предложить функцию Грина для задачи Пуассона для наиболее общего случая произвольной функции распределения плотности, необходимой для моделирования реальных объектов.

С одной стороны, если нас интересует распределение темной материи, то окончательное решение практически не зависит от спиральной структуры галактики (которая представлена в трехмерном виде и анализировалась во многих работах разных исследователей, таких как Bertin et al. (1977), Burch and Cowsik (2013), Hu et al. (2007), Jog (1999), Kostov (2006)), поэтому угловая переменная может быть опущена в первом приближении как несущественная (Binney and Tremaine 2008). С другой стороны, 2D-решение важно, потому что оно используется для различных целей и обеспечивает простоту использования, анализа и интерпретации. Принимая во внимание все вышесказанное, мы рассматриваем двумерную задачу ввиду ее большой важности.

Понятно, что с технической точки зрения (в рамках метода Гринберга (Grinberg 1948)) трехмерная задача совпадает с двумерной и может быть решена с помощью методики, описанной в данной работе. По этой причине в данной статье не только дается аналитическое решение общей 2D-задачи, но и предлагается общий метод, который позволит в будущем решать более общую 3D-задачу, которая будет рассмотрена в следующей статье.

В настоящей статье мы решаем двумерную задачу Пуассона в цилиндрических координатах с помощью метода конечных интегральных преобразований (finite integral transform technique, FITT) (Almeida and Cotta 1999, Bepalova 2014, Cotta and Mikhailov 1993, Cotta 1970; 1993, Gasymov 2011, Guerrero et al. 2009, Lisboa and Cotta 2018, Mikhailov and Ozisik 1994, Monteiro et al. 2009), впервые разработанного Гринбергом Grinberg (1948) (в этой статье мы будем называть этот метод методом Гринберга). Окончательное решение представлено в виде разложения по собственным функциям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Построена функция Грина для этой задачи.

Следует подчеркнуть, что предлагаемый нами метод нашел широкое применение в других областях физики, но до сих пор совершенно не используется в астрофизике.

Метод основан на краевой задаче. Это означает, что дифференциальные уравнения и их решения

работают правильно только в интервале заданных границ.

Чтобы проиллюстрировать, как работает этот метод, мы используем данные наблюдений галактики Млечный Путь. В данной работе были установлены граничные условия для нашей галактики на расстоянии $r = 15$ кпк, что вполне достаточно для демонстрации возможностей метода. Конечно, граничные условия можно задавать на любом расстоянии, но целью данной работы является разработка универсального метода расчета потенциала и кривой вращения, а не построение детальной модели нашей Галактики.

Одним из часто используемых потенциалов (благодаря его простоте, удобству и точности) является потенциал Миямото–Нагаи (Miyamoto and Nagai 1975) (см. также Sofue (2013b), Sofue and Rubin (2001), Takamiya and Sofue (2000)), позволяющий записать аналитическое выражение для функции распределения плотности и построить модель галактического диска. Однако выражение для плотности в модели Миямото–Нагаи довольно громоздко и в случае многокомпонентного диска вычисления становятся не очень удобными. По этой причине Lipovka (2018) недавно предложил более краткое решение. Благодаря такому подходу можно рассчитать гравитационный потенциал и найти соответствующую кривую вращения, однако решение, предложенное в статье Lipovka (2018), как и все предыдущие решения, получено для конкретного распределения.

Следует отметить, что кривые вращения являются основным инструментом для получения распределения массы в дисковых галактиках. Общая характеристика наблюдаемых кривых вращения галактики состоит в том, что скорость вращения наблюдаемых звезд в этой галактике зависит от их радиального расстояния от центра галактики.

Кривые вращения спиральных галактик детально изучены и на эту тему имеется большое количество публикаций (см., например, работы Sofue (2012; 2013a; b; 2015; 2016; 2017), Sofue and Rubin (2001), Takamiya and Sofue (2000) и ссылки в них).

В указанных работах распределения плотности вещества в галактиках строятся по наблюдаемым кривым вращения.

Основываясь на допущении о круговых орбитах, авторы Pato and Iocco (2017) представили компилятивную работу, в которой основное внимание уделяется диапазону радиусов галактик между $r = 3$ –20 кпк и которая не предназначена для использования вне этого диапазона. Pato and Iocco (2017) построили кривую вращения Млечного Пути с учетом кинематики газа и звезд. На приведенной авторами кривой вращения видно, что начиная со значения радиуса $r = 8$ кпк дисперсия скоростей значительно возрастает.

Следует также отметить работу Karukes et al. (2020), в которой были описаны распределения масс трех барионных компонентов галактики: звездного балджа, звездного диска и газа. Авторы использовали кривую вращения для расчета темной материи и распределения общей массы для профиля темной материи, а также общего профиля звездной массы.

В работе Fich et al. (1989) исследуется кривая вращения Галактики Млечный Путь для расстояний от $r = 3$ кпк до 17 кпк. Авторы используют полиномиальные функции и степенной закон для моделирования кривых вращения. В результате авторы сообщают о неудовлетворительной сходимости предложенной аппроксимации к наблюдаемой кривой вращения для расстояний, превышающих $r = 10$ кпк.

Во всех упомянутых выше работах авторы использовали специфические функции распределения плотности для разных компонентов галактики, что является существенным ограничением для построения общей модели. Предлагаемый в нашей работе метод не имеет указанного ограничения, так как разработанный нами подход пригоден для любой функции распределения плотности (в частности, мы использовали в качестве примера функцию, предложенную Lipovka (2018)).

Еще одним преимуществом нашего метода является то, что нет необходимости использовать численные методы, а выражения для потенциала и кривой вращения записываются аналитически.

В данной статье мы предлагаем решение задачи Пуассона для произвольного аналитически заданного распределения материи в галактике. Следует подчеркнуть, что изначально никаких предположений о природе гравитирующей материи не делается. Поэтому без ограничений можно брать как барионную компоненту, так и распределение плотности темной материи.

В наших расчетах в качестве граничного значения мы берем 15 кпк. Понятно, что граничные условия могут быть установлены на любом расстоянии от центра галактики, и этот выбор обусловлен только тем, какую область галактики мы хотим описать. Однако, принимая во внимание тот факт, что наши расчеты носят чисто демонстрационный характер и не преследуют цели построения всесторонней и исчерпывающей модели, мы решили ограничиться некоторым средним расстоянием для иллюстрации работы предложенного метода. Видно, что вблизи границы (вблизи расстояния $r = 15$ кпк) полученное решение начинает отличаться от наблюдаемого, что характерно для любой краевой задачи.

Однако это можно легко исправить, установив граничные условия для того расстояния, которое требуется в каждом конкретном случае расчета.

Для частного случая решения, полученного с помощью разработанного метода, было обнаружено хорошее соответствие между кривой вращения, описанной в этой статье, и кривыми вращения, предложенными в работах Fich et al. (1989), Karukes et al. (2020), Pato and Iocco (2017), Sofue (2013b).

2. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДИСКОВЫХ ГАЛАКТИК

Рассмотрим симметричный, плоский, вращающийся дискообразный сплюснутый объект (галактику), характеризующийся распределением плотности $\rho(r, \phi, z)$. В этом случае уравнение Пуассона $\nabla^2 u = \kappa\rho$, где $\kappa = 4\pi G$, записанное в цилиндрической системе координат для гравитационного потенциала u имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \kappa\rho(r, \phi, z). \quad (1)$$

Как было сказано ранее, в упомянутых выше задачах спиральная структура галактики почти несущественна (вариация скорости звезд из-за наличия дисковой структуры более чем на порядок меньше по сравнению с ее невозмущенным значением (Binney and Tremaine 2008)). По этой причине задача имеет осевую симметрию, и мы можем рассматривать только две переменные r и z . В этом случае уравнение Пуассона принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \kappa\rho(r, z), \quad (2)$$

где $\rho(r, z)$ — поверхностная плотность вещества.

Это уравнение должно быть также дополнено следующими граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{V_0^2}{a} g(z), \quad (3)$$

и

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=\infty} < \infty, \quad (4)$$

где V_0 — экспериментально измеренная скорость звезд, находящихся на расстоянии a от центра галактики, а $g(z)$ — функция Хевисайда.

Функция Хевисайда используется, чтобы подчеркнуть, что градиент потенциала ниже плоскости диска равен нулю, но является постоянным выше нее. Для решения задач (2), (3) и (4) используется метод Гринберга (или метод FITT) (Almeida and Cotta 1999, Bepalova 2014, Cotta and Mikhailov 1993, Cotta 1970; 1993, Gasymov 2011, Grinberg 1948, Guerrero et al. 2009, Lisboa and Cotta 2018, Mikhailov and Ozisik 1994, Monteiro et al. 2009). В соответствии с этим методом мы должны сначала определить и решить задачу Штурма–Лиувилля

(SLP), чтобы получить полный набор собственных функций. Затем расширяем решение неоднородной задачи на полученный набор собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Соответствующее однородное уравнение таково:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda. \quad (5)$$

Пусть $u(r, z) = R(r)Z(z)$. В этом случае мы получаем задачу Штурма–Лиувилля для $R(r)$, которая представляет собой уравнение Бесселя:

$$(rR')' + \lambda rR = 0, \quad (6)$$

дополненное однородными граничными условиями:

$$R'|_{r=0} = 0, \quad R'|_{r=a} = 0. \quad (7)$$

Заметим здесь, что задача Штурма–Лиувилля на основе $Z(z)$ не является регулярной, и по этой причине, предпочтение следует отдавать задачам (6) и (7). Как видно, уравнение (6) и граничные условия (7) действительно образуют задачу Штурма–Лиувилля. Для нулевого собственного значения она решается так:

$$\lambda_0 = 0; \quad R_0 = 1. \quad (8)$$

В случае, когда собственное значение $\lambda \neq 0$, получаем уравнение Бесселя, радиальное решение которого для этой задачи выражается через функции Бесселя:

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2; \quad R_n = J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \quad (9)$$

где корень $\gamma_n = (\sqrt{\lambda_n}a)$ удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$J_1(\gamma_n) = 0. \quad (10)$$

Для удобства читателя мы также запишем здесь абсолютные значения собственных функций (мы будем использовать их для построения окончательного решения задачи):

$$\|R_n\|^2 = \int_0^a R_n R_n r dr. \quad (11)$$

Для нулевого собственного значения $n = 0$ имеем:

$$\|R_0\|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad (12)$$

а для $n \neq 0$, это значение составляет

$$\|R_n\|^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(\gamma_n). \quad (13)$$

Хорошо известно, что собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (6) и (7) образуют полный набор функций в гильбертовом пространстве. По этой причине, если функция $u(r, z)$ удовлетворяет

условию Дирихле в интервале $[0, \alpha]$, ее можно разложить в ряд Дини (Bowman 1958):

$$u(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z) R_n(r) = C_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) J_0(\sqrt{\lambda_n} r), \quad (14)$$

где

$$C_n(z) = \frac{\bar{u}_n(z)}{\|R_n\|_r^2}, \quad (15)$$

и преобразованная потенциальная функция $\bar{u}_n(z)$ дается интегралом

$$\bar{u}_n(z) = \int_0^a u(r, z) R_n(r) r dr. \quad (16)$$

Чтобы найти преобразованную потенциальную функцию $\bar{u}_n(z)$ по методу Гринберга, необходимо преобразовать исходное уравнение (2) и граничные условия (4). Преобразованные уравнения легко получить, используя граничные условия (3) и (7). Их можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 \bar{u}_n(z)}{dz^2} - \lambda_n \bar{u}_n(z) = F_n(z), \quad (17)$$

где

$$F_n(z) = \varkappa \rho_n(z) + V_0^2 J_0(\gamma_n) g(z), \quad (18)$$

и преобразованная поверхностная плотность $\rho_n(z)$ определяется соотношением

$$\rho_n(z) = \int_0^a \rho(r, z) R_n r dr. \quad (19)$$

Преобразованные граничные условия:

$$\bar{u}_n|_{z=\infty} < \infty; \quad \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial z}|_{z=0} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (17) вместе с граничными условиями (20) позволяют получить преобразованную потенциальную функцию $\bar{u}_n(z)$.

Теперь следует рассмотреть два частных случая. Первый соответствует нулевому собственному значению, когда $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ и $R_0 = 1$. В этом случае уравнение (17) принимает вид:

$$\bar{u}_0''(z) = F_0(z). \quad (21)$$

Учитывая симметричность задачи относительно координаты z , можно записать решение уравнения (21), удовлетворяющее граничным условиям (20) таким образом:

$$\bar{u}_0(z) = 4 \int_0^z \int_0^{z'} F_0(z'') dz'' dz' + B_0 = 4\varkappa \int_0^z \int_0^{z'} \int_0^a \rho(r, z'') r dr dz'' dz' + 4V_0^2 \int_0^z \int_0^{z'} g(z'') dz'' dz' + B_0, \quad (22)$$

где B_0 является постоянной интегрирования. Следует отметить, что эта константа не имеет физического смысла, как видно из выражения (30). Ее нет в выражении для кривой вращения (31). Она соответствует выбору системы координат, и поэтому может быть выбрана равной нулю. Однако мы оставим ее в наших расчетах для полноты картины.

Рассмотрим теперь случай, когда $n \neq 0$, то есть $\lambda_n \neq 0$. В этом случае решение уравнения (17) можно записать в виде

$$\bar{u}_n(z) = D_1(z) e^{-\sqrt{\lambda_n} z} + D_2(z) e^{\sqrt{\lambda_n} z}, \quad (23)$$

где $e^{\sqrt{\lambda} z}$ и $e^{-\sqrt{\lambda} z}$ являются общими решениями соответствующих однородных уравнений

$$\frac{d^2 \bar{u}_n(z)}{dz^2} - \lambda_n \bar{u}_n(z) = 0, \quad (24)$$

а коэффициенты $D_1(z)$ и $D_2(z)$ являются определяемыми функциями, которые вычисляются по вронскиану:

$$D_1(z) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^z F_n(z') e^{\sqrt{\lambda_n} z'} dz' \quad (25)$$

и

$$D_2(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^z F_n(z') e^{-\sqrt{\lambda_n} z'} dz'. \quad (26)$$

Следовательно, решение задачи (17) и (20) для случая $\lambda_n \neq 0$, то есть $n \neq 0$ может быть записано как:

$$\bar{u}_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left[e^{\sqrt{\lambda_n} z} \int_0^z F_n(z') e^{-\sqrt{\lambda_n} z'} dz' - e^{-\sqrt{\lambda_n} z} \int_0^z F_n(z') e^{\sqrt{\lambda_n} z'} dz' \right], \quad (27)$$

где $F_n(z')$ задается как (18), и

$$\rho_n(z) = \int_0^a \rho(r, z) R_n(r) r dr. \quad (28)$$

Теперь построим функцию Грина и запишем окончательное выражение для потенциала $u(r, z)$. Решение рассматриваемой задачи описывается уравнением (2) и граничными условиями (3) и (4), и

может быть выражено следующим образом:

$$u(r, z) = \bar{u}_0(z) \frac{R_0}{\|R_0\|_r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(z) \frac{R_n(r)}{\|R_n(r)\|_r^2}. \quad (29)$$

Подставляя (8), (9), (12), (13), (22) и (27) в (29), получаем окончательное решение нашей задачи:

$$u(r, z) = \frac{8}{a^2} \int_0^z \int_0^{z'} F_0(z'') dz'' dz' + \frac{2B_0}{a^2} + \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(z) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)}, \quad (30)$$

где $\bar{u}_n(r, z)$ определяется отношением (27).

Выражение (30) описывает гравитационный потенциал галактики в случае произвольного распределения функции плотности $\rho(r, z)$. Из последнего выражения можно получить кривую вращения спиральной галактики:

$$V^2(r) = \frac{2r}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \bar{u}_n(z) \frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)}. \quad (31)$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Выражение (31), полученное в предыдущем разделе для кривой вращения, позволяет вычислить указанные величины для любого произвольного распределения вещества в галактиках. Чтобы проиллюстрировать, как это работает на практике, применим эти выражения к конкретному случаю.

Недавно была предложена функция распределения плотности, которая факторизуется $\rho(r, z) = \rho_r(r) \rho_h(z)$ и имеет довольно простой вид (Lipovka 2018):

$$\rho(r, z) = \frac{10^{10} M_{\odot}}{(\gamma t^2 + 1)^{3/2}} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}}, \quad (32)$$

где $\gamma, \alpha_k, \beta_k$ — параметры аппроксимации, $x = r/a$, $t = z/z_0$ — безразмерные переменные, а параметр z_0 — масштабная высота диска. Используя эту функцию плотности, мы можем аналитически проинтегрировать выражения (27) и (28). Интегрирование по z дает:

$$V^2(r) = \frac{2r}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^- - E_n^+) \left(\frac{J_1(\sqrt{\lambda_n} r)}{J_0^2(\gamma_n)} \right), \quad (33)$$

где коэффициенты E_n^+ и E_n^- :

$$E_n^+ = \frac{e^{\sqrt{\lambda_n} z_0}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\kappa \rho_{rn}(a) \gamma^n \binom{-3/2}{n} (\sqrt{\lambda_n} z_0)^{-2n-1} \Gamma((2n+1), \sqrt{\lambda_n} z_0) + (e^{-\sqrt{\lambda_n} z_0} - 1) V_0^2 J_0(\gamma_n) \right), \quad (34)$$

$$E_n^- = \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n} z_0}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\kappa \rho_{rn}(a) \gamma^n \binom{-3/2}{n} (-\sqrt{\lambda_n} z_0)^{-2n-1} \Gamma((2n+1), -\sqrt{\lambda_n} z_0) - (e^{\sqrt{\lambda_n} z_0} - 1) V_0^2 J_0(\gamma_n) \right), \quad (35)$$

$$\rho_{rn}(a) = \int_0^a \rho_r(r) J_0(\gamma_n \frac{r}{a}) r dr. \quad (36)$$

Здесь, $\rho_r(r)$ — радиальная часть распределения плотности (32):

$$\rho_r(r) = 10^{10} M_{\odot} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{(\beta_k x^2 + 1)^{3/2}}. \quad (37)$$

В этом случае коэффициенты $\rho_{rn}(a)$ можно записать как:

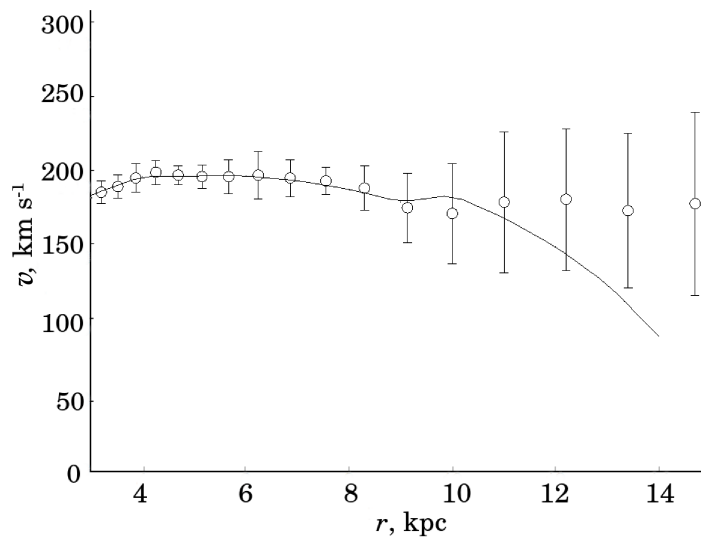


Рис. 1. Кривая вращения Галактики, рассчитанная нами по выражению (33) (сплошная линия) и измеренная (светлые кружки с барами ошибок) из статьи Sofue (2013b).

$$\rho_{\text{rn}}(a) = 10^{10} M_{\odot} \int_0^a \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{\left(\beta_k \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1\right)^{3/2}} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) r dr. \quad (38)$$

Разлагая функцию Бесселя в ряд и интегрируя, получаем следующие коэффициенты:

$$\rho_{\text{rn}}(a) = \frac{10^{10} M_{\odot}}{a^2} \sum_{k=1}^{k'} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{\gamma_n}{2\sqrt{\beta_k}}\right)^{2m} \sum_{0 \leq l \leq m} \binom{m}{l} \frac{(-1)^{l+1} (\beta_k x^2 + 1)^{l-\frac{1}{2}}}{(1-2l)} \Big|_{x=0}^{x=1} \quad (39)$$

Полученное выражение (33) дает кривая вращения для распределения плотности наиболее общего вида (32) в виде разложения по функциям Бесселя первого рода $J_1(\sqrt{\lambda_n} r)$. Для расчета кривой вращения Галактики мы используем коэффициенты из статьи Lipovka (2018): $\gamma = 30$, $\alpha_1 = 0.2317$, $\beta_1 = 0.112$, $\alpha_2 = 6.358$, $\beta_2 = 28.8$, $\alpha_3 = 7.005$ и $\beta_3 = 1440$. Для Млечного Пути (Gaensler et al. 2008) принято значение масштабной высоты $z_0 = 2$ кпк. Результат расчетов показан на рис. 1, на котором мы сравниваем нашу расчетную кривую вращения Галактики (см. выражение (33)) с наблюдаемой кривой вращения, опубликованной в статье Sofue and Rubin (2001).

Как было сказано выше, применяемый метод основан на краевой задаче. Поэтому дифференциальные уравнения и их решения работают правильно только в интервале, выбранном для определенной границы. В данной работе интервал расчетной границы выбирался от $r = 0$ кпк до 15 кпк.

4. ВЫВОДЫ

Одной из важных задач астрофизики является задача расчета гравитационного потенциала галактики.

Эта задача важна, так как она является типовой для расчета кинематики галактик, когда необходимо вычислить гравитационный потенциал, исходя из заданного распределения плотности вещества.

Как известно, ее можно свести к задаче Пуассона в цилиндрических координатах. К сожалению, имеющиеся в настоящее время решения громоздки и получены для небольшого числа конкретных функций распределения, тогда как для произвольной функции распределения масс такого решения не существует и можно применять только численные расчеты.

В данной работе получено аналитическое решение задачи Пуассона в цилиндрических координатах для произвольной функции распределения масс как по радиусу, так и по высоте. Соответствующая функция Грина получается методом Гринберга (Grinberg 1948) (методом конечных интегральных преобразований). На основе полученного аналитического решения предложено выражение для соответствующей кривой вращения спиральной галактики.

В качестве примера применимости найденного решения используем его для расчета кривой вращения Млечного Пути и сравниваем полученные результаты с наблюдаемой кривой вращения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Меса Гаксиола Армандо хотел бы поблагодарить CONACYT за финансовую поддержку в виде гранта и Университет Соноры за предоставленную ему возможность учиться в аспирантуре.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. R. Almeida and R. M. Cotta, J. Franklin Institute—engineering and Applied Mathematics **336**, 821 (1999).
2. A. Banerjee and C. J. Jog, Astrophys. J. **662** (1), 335 (2007).
3. G. Bertin, Y. Y. Lau, C. C. Lin, et al., Proc. National Academy of Science **74** (11), 4726 (1977).
4. T. I. Bespalova, International Applied Mechanics **50**, 651 (2014).
5. J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2nd ed. (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008).
6. F. Bowman, *Introduction to Bessel Functions* (Dover Publ., Inc., New York, 1958).
7. B. Burch and R. Cowsik, Astrophys. J. **779** (1), 35 (2013).
8. S. Casertano, Monthly Notices Royal Astron. Soc. **203**, 735 (1983).
9. R. Cotta and M. Mikhailov, Applied Mathematical Modelling **17**, 156 (1993).
10. R. M. Cotta, WIT transactions on engineering sciences **20** (1970).
11. R. M. Cotta, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow* (CRC Press, Inc., London-Tokyo, 1993).
12. I. Ferreras, *Fundamentals of Galaxy Dynamics, Formation and Evolution* (UCL Press, London, 2019).
13. M. Fich, L. Blitz, and A. A. Stark, Astrophys. J. **342**, 272 (1989).
14. B. M. Gaensler, G. J. Madsen, S. Chatterjee, and S. A. Mao, Publ. Astron. Soc. Australia **25** (4), 184 (2008).
15. E. A. Gasymov, Differential Equations **47**, 319 (2011).
16. G. A. González and J. I. Reina, Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. **40** (156), 402 (2016).
17. G. A. Grinberg, *Izbrannyye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* (Izd. Akad. Nauk SSSR, 1948) [in Russian].
18. J. S. P. Guerrero, L. C. G. Pimentel, T. H. Skaggs, and M. T. van Genuchten, Int. J. Heat Mass Transfer **52**, 3297 (2009).
19. M. Honma and Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **48**, L103 (1996).
20. T. Hu, Q.-H. Peng, and H.-S. Zong, Chinese J. Astron. Astrophys. **7** (4), 579 (2007).
21. C. J. Jog, Astrophys. J. **522** (2), 661 (1999).
22. T. C. Junqueira, J. R. D. Lépine, C. A. S. Braga, and D. A. Barros, Astron. and Astrophys. **550**, A91 (2013).
23. E. V. Karukes, M. Benito, F. Iocco, et al., J. Cosmology Astroparticle Physics **2020** (5), 033 (2020).
24. O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1967).
25. B. P. Kondratev, Astron. Zh. **59**, 458 (1982).
26. V. Kostov, arXiv:0604395 (2006).
27. E. Kun, Z. Keresztes, A. Simko, et al., arXiv:1604.02465 (2017).
28. F. Lelli, S. S. McGaugh, and J. M. Schombert, Astron. J. **816** (1), L14 (2015).
29. F. Lelli, S. S. McGaugh, and J. M. Schombert, Astron. J. **152** (6), 157 (2016).
30. F. Lelli, S. S. McGaugh, J. M. Schombert, and M. S. Pawlowski, Astrophys. J. Lett. **827** (1), L19 (2016).
31. A. A. Lipovka, Publ. Astron. Soc. Japan **70** (5), 86 (2018).
32. K. M. Lisboa and R. M. Cotta, Proc. Royal Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **474** (2209):20170637 (2018).
33. S. S. McGaugh, F. Lelli, and J. M. Schombert, Phys. Rev. Lett. **117**, 201101 (2016).
34. S. S. McGaugh and J. M. Schombert, Astrophys. J. **802** (1), 18 (2015).
35. S. S. McGaugh, J. M. Schombert, G. D. Bothun, and W. J. G. de Blok, Astrophys. J. Lett. **533** (2), L99 (2000).
36. M. Mikhailov and M. Ozisik, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion* (Dover Publ., Inc., New York, 1994).
37. M. Miyamoto and R. Nagai, Publ. Astron. Soc. Japan **27**, 533 (1975).
38. E. Monteiro, E. Macedo, J. Quaresma, and R. Cotta, Int. Commun. Heat Mass Trans. **36**, 297 (2009).
39. S. Ninković, Publ. Astron. Soc. Australia **32**, e032 (2015).
40. M. Pato and F. Iocco, SoftwareX **6**, 54 (2017).
41. Q. Peng, Astron. and Astrophys. **206**, 18 (1988).
42. Q. Peng, X. Li, H. Su, K. Huang, J. Huang, Scientia Sinica **22**, 925 (1979).
43. J. I. Reina-Medrano, F. López-Suspes, and G. A. González, Universitas Scientiarum **23**, 191 (2018).
44. Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **64**, 75 (2012).
45. Y. Sofue, *Planets, Stars and Stellar Systems* Vol. 5: *Galactic Structure and Stellar Populations*, p. 985 (2013a).
46. Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **65**, 118 (2013b).
47. Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **67** (4), 75 (2015).
48. Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **68** (1), 2 (2016).
49. Y. Sofue, Publ. Astron. Soc. Japan **69** (1), R1 (2017).
50. Y. Sofue, Galaxies **8** (2), 37 (2020).
51. Y. Sofue and V. Rubin, Annual Rev. Astron. Astrophys. **39**, 137 (2001).
52. Y. Sofue, M. Honma, and T. Omodaka, Publ. Astron. Soc. Japan **61**, 227 (2009).
53. T. Takamiya and Y. Sofue, Astrophys. J. **534** (2), 670 (2000).

54. A. Toomre, *Astrophys. J.* **138**, 385 (1963).

56. Y. Zhao, Q. H. Peng, and L. Wang, *Chin. J. Astron.*

55. Y. Zhao, Q. Peng, and T. Hu, *Astron. and Astrophys.*

Astroph. **4**, 51 (2004).

452 (2), 451 (2006).

Modeling the Rotation Curve of Disk Galaxies

A. Meza¹ and A. A. Lipovka¹

¹Department of Research for Physics, Sonora University, 83000, Hermosillo Sonora, México

The present paper suggests an exact solution of the Poisson equation which appears infrequently addressed in applications regarding the calculation of the gravitational potential of disk galaxies. We suggest an analytical solution for the problem in cylindrical coordinates by using the finite integral transform technique. The final solution is presented as an expansion on the eigenfunctions of the corresponding Sturm–Liouville problem. The Green’s function of the problem is constructed for an arbitrary density distribution function of matter in a galaxy. Based on the obtained results, we propose an expression for the rotation curve. As an example, this paper suggests the calculations of the rotation curve for the Galaxy.

Keywords: *methods: numerical — galaxies: elliptical and lenticular, cD: gravitation*