

Фрактальный анализ крупномасштабного распределения галактик

Ю.В. Барышев¹, П. Теерикорпи²

¹ Астрономический институт, Санкт-Петербургский гос. университет, Старый Петергоф, 198504, Россия

² Обсерватория Туорла, Университет Турку, 21500 Пииккио, Финляндия

Поступила в редакцию 21 октября 2004 г.; принята к печати 14 января 2005 г.

Представлен обзор истории и современного состояния фрактального подхода к изучению крупномасштабного распределения галактик. Современное представление о космической фрактальности уходит корнями в начало XX века, когда Фурнье и Шарлье предложили иерархические модели мира. Значение иерархического распределения вещества для космологии обсуждали Эйнштейн и Селети в своей переписке, посвященной фундаментальным вопросам иерархических моделей.

“Великий Спор” о природе спиральных галактик перешел в дискуссию о структуре и протяженности скоплений галактик. Уже в эпоху каталогов угловых положений галактик астрономы обнаружили на небе гигантские сверхскопления. Однако ранние подсчеты ярких галактик давали закон $0.6m$, который означал однородность. Кроме того, обсуждавшееся тогда переменное поглощение в Галактике казалось приемлемым объяснением видимого сгущения галактик. Анализ угловой корреляционной функции указывал на малость масштаба однородности $R_{hom} \approx 10$ Мпк, внутри которого показатель степени корреляционной функции соответствовал фрактальной размерности $D \approx 1.2$.

Позже пришло понимание того, что условие нормировки корреляционной функции приводит к искажению и R_{hom} , и D . Кроме того, согласно теореме о проекциях фракталов каталоги угловых положений галактик не содержат информации о структурах с фрактальной размерностью $D \geq 2$. Для обнаружения таких структур требуются трехмерные карты. Действительно, современные пространственные карты распределения галактик, построенные на основе красных смещений, выявили “скрытую” фрактальную размерность, равную примерно 2, и подтвердили сверхкластеризацию на масштабах достигающих 500 Мпк (Великая Стена Слоана). На масштабах, где можно применять фрактальный анализ с использованием полностью вложенных сфер, было обнаружено, что поля плотности чисел галактик описываются степенным законом.

Появились две новые фундаментальные космические величины: фрактальная размерность D и масштаб перехода к однородности R_{hom} . О них шли споры, и значение $D = 1.2$, полученное косвенным путем из каталогов угловых положений, изменилось на $D = 2.2 \pm 0.2$, прямо вычисленное по трехмерным картам, а R_{hom} увеличилось с 10 Мпк до масштабов, достигающих 100 Мпк. Современные подсчеты галактик на всей небесной сфере в интервале $10^m - 15^m$ дают закон $0.44m$, соответствующий $D = 2.2$ в пределах радиуса 100 Мпк, что согласуется с результатами, полученными по трехмерным картам. Главные причины, которые все еще мешают точно оценить D и R_{hom} , — это узкие конусы имеющих глубоких обзоров галактик и плохо известные пекулярные скорости на малых масштабах. Мы подчеркиваем, что фрактальный закон “масса-радиус” для кластеризации галактик стал ключевым явлением в наблюдательной космологии. Он бросает новый вызов теоретическому пониманию происхождения и эволюции распределения галактик, включая роль темной материи и темной энергии.

Ключевые слова: распределение галактик, космология, фракталы

THE FRACTAL ANALYSIS OF THE LARGE SCALE GALAXY DISTRIBUTION, by Yu. Baryshev, P. Teerikorpi. We present a review of the history and the present state of the fractal approach to the large-scale distribution of galaxies. The roots of the modern idea of cosmic fractality go to the beginning of the 20th century, when hierarchical world models were proposed by Fournier and Charlier. Cosmological significance of hierarchical matter distribution was discussed in the Einstein–Selety correspondence concerning fundamental questions of hierarchical models.

The Great Debate on the nature of spiral nebulae went over to a struggle on the structure and extension of the galaxy clustering. Already during the epoch of galaxy angular catalogues astronomers detected superclusters of galaxies on the sky. However, early counts of bright galaxies were close to the $0.6m$ -law, pointing to homogeneity. Also the debated variable extinction seemed to be a reasonable explanation of apparent galaxy clustering. Angular correlation function analysis gave small a homogeneity scale $R_{\text{hom}} \approx 10$ Mpc within which the correlation exponent corresponds to a fractal dimension $D \approx 1.2$ and outside which the galaxy distribution is homogeneous.

It was realized later that a normalization condition for the correlation function estimator results in distorted values for both R_{hom} and D . Moreover, according to a theorem on projections of fractals, galaxy angular catalogues can not be used for detecting a structure with the fractal dimension $D \geq 2$. For this 3-d maps are required, and indeed modern extensive redshift-based 3-d maps have revealed the “hidden” fractal dimension of about 2, and have confirmed superclustering at scales even up to 500 Mpc (the Sloan Great Wall). On scales, where the fractal analysis is possible in completely embedded spheres, a power-law density field has been found.

Two new fundamental cosmic numbers have appeared, the fractal dimension D and the crossover scale to homogeneity R_{hom} . Their values have been debated, and $D = 1.2$ indirectly deduced from angular catalogues has been replaced by $D = 2.2 \pm 0.2$ directly obtained from 3-d maps and R_{hom} has expanded from 10 Mpc to scales approaching 100 Mpc. In concordance with the 3-d map results, modern all sky galaxy counts in the interval $10^m \div 15^m$ give a $0.44m$ -law which corresponds to $D = 2.2$ within a radius of $100h_{100}^{-1}$ Mpc. The narrow cones of the existing deep galaxy surveys and poorly known peculiar velocities at small scales are still the main limiting factors hampering precise estimates of D and R_{hom} . We emphasize that the fractal mass-radius law of galaxy clustering has become a key phenomenon in observational cosmology. It creates novel challenges for theoretical understanding of the origin and evolution of the galaxy distribution, including the role of dark matter and dark energy.

Key words: galaxy distribution, cosmology, fractals

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение
2. Фрактальный подход к крупномасштабной структуре Вселенной
 - 2.1. Идея самоподобной Вселенной
 - 2.1.1. Протофракталы
 - 2.1.2. Фурнье д'Альб и Карл Шарлье
 - 2.2. Подлинно фрактальные структуры
 - 2.2.1. Самоподобие и степенной закон
 - 2.2.2. Фрактальная размерность
 - 2.3. Концепции поля плотности
 - 2.3.1. Обычные поля плотности жидкости и газа
 - 2.3.2. Обычные стохастические дискретные процессы
 - 2.3.3. Фрактальные поля плотности
 - 2.4. Специфические свойства фракталов
 - 2.4.1. Степенное соотношение “плотность-радиус”
 - 2.4.2. Массивные вселенные с нулевой плотностью
 - 2.4.3. Верхняя и нижняя граница
 - 2.4.4. Лакунарность
 - 2.4.5. Проекция и сечение
 - 2.4.6. Мультифрактальные структуры
 - 2.5. Современные обзоры красных смещений и фотометрических расстояний
 - 2.5.1. Обзоры красных смещений
 - 2.5.2. Каталоги галактик, основанные на фотометрических расстояниях
 - 2.5.3. Как обнаружить фрактальные структуры
3. Статистические методы обнаружения фрактальных структур
 - 3.1. Определения корреляционных функций
 - 3.1.1. Полная и редуцированная корреляционные функции
 - 3.1.2. Вариация массы в сферах и характерные масштабы
 - 3.2. Метод корреляционной ξ -функции
 - 3.2.1. Корреляционная ξ -функция Пиблса
 - 3.2.2. Оценки ξ -функции
 - 3.2.3. Условие нормировки для оценок ξ -функции
 - 3.2.4. Систематическое искажение истинного степенного закона оценкой ξ
 - 3.2.5. Пространство красных смещений и поле peculiarных скоростей
 - 3.3. Метод условной плотности Γ

- 3.3.1. Определения
- 3.3.2. Оценка Г-функции
- 3.3.3. $\Gamma_z(s)$ и v_{pec} для пространства красных смещений
- 3.3.4. Г-функция для сечений
- 3.4. Сравнение ξ - и Г-функций**
- 3.4.1. Соотношение между Г и ξ
- 3.4.2. Зависимость r_0 от глубины выборки
- 3.4.3. Геометрия и характерные масштабы обзора
- 3.5. Распределение ближайших соседей**
- 3.6. Двухточечная условная лучевая плотность**
- 3.6.1. Определения
- 3.6.2. Оценка
- 3.7. Фурье-анализ структур**
- 3.7.1. Обычное поле плотности
- 3.7.2. Фрактальное поле плотности
- 3.7.3. Роль геометрии выборки
- 3.8. Мультифракталы и функция светимости**
- 3.8.1. Спектр фрактальных размерностей
- 3.8.2. Функция светимости Шехтера
- 3.8.3. Корреляция положение-светимость в мультифрактальной модели
- 4. Эпоха каталогов угловых положений галактик**
- 4.1. Зарождение спора**
- 4.1.1. Переписка между Эйнштейном и Селенти
- 4.1.2. Ретроспективный взгляд на поставленные вопросы
- 4.2. Первые аргументы в пользу кластеризации галактик**
- 4.2.1. Наблюдения выявляют скопления галактик
- 4.2.2. Конференция 1961 года в Санта-Барбаре
- 4.2.3. Космологический закон де Вокулера
- 4.3. Ранние аргументы в пользу однородности распределения галактик**
- 4.3.1. Хаббловские подсчеты ярких галактик
- 4.3.2. Хаббловские глубокие подсчеты галактик
- 4.3.3. Вариации поглощения пылью
- 4.3.4. Аргумент в пользу "линейности" закона Хаббла
- 4.3.5. Изотропия в однородной вселенной
- 4.4. Результаты, полученные по каталогам угловых положений галактик**
- 4.4.1. Основные каталоги галактик и скоплений
- 4.4.2. Анализ угловой корреляционной функции
- 4.4.3. Угловая и пространственная корреляционные функции
- 4.4.4. Иерархические модели с $D=1.2$ для каталогов угловых положений галактик

- 4.4.5. Таллиннская конференция 1977 года
- 4.4.6. Первые свидетельства в пользу распределения галактик с $D=2$
- 4.4.7. Почему каталоги угловых положений теряют информацию о структурах с $D=2$?
- 5. Дебаты о фрактальности: эпоха пространственных карт**
- 5.1. Фрактальный прорыв в 1980-е годы**
- 5.1.1. Анализ выборки галактик CfA с помощью корреляционной ξ -функции, выполненный Дэвисом и Пиблсом
- 5.1.2. Загадочное поведение ξ -функции
- 5.1.3. Решение Пиетронеро загадки r_0
- 5.1.4. Ячеистая фрактальная структура Вселенной
- 5.1.5. Ошибочное введение мультифрактальности из-за оценки $D_2 = 1.2$, полученной методом ξ -функции
- 5.1.6. Конференция 1987 года в Балатонфюреде и наблюдательные свидетельства очень больших структур
- 5.2. Дальнейшие этапы дебатов**
- 5.2.1. Принстонские "Диалоги-96": аргументы Дэвиса в пользу однородности на масштабах, превосходящих $20h_{100}^{-1}$ Мпк
- 5.2.2. Принстонские "Диалоги-96": аргументы Пиетронеро в пользу фрактальности
- 5.2.3. Проблема проекции фракталов на небесную сферу
- 5.2.4. Современные научные вопросы, связанные с крупномасштабной фрактальностью
- 5.3. Недавние результаты, полученные с помощью анализа ξ - и Г-функций**
- 5.3.1. ξ - и Г-функции в пространстве красных смещений
- 5.3.2. Проблема поля пекулярных скоростей
- 5.3.3. Проблема зависимости r_0 от R_s , L , \bar{d} и типа галактики
- 5.3.4. Спектр мощности и сечение фракталов
- 5.4. Другие результаты фрактального подхода**
- 5.4.1. Двухточечная условная лучевая плотность
- 5.4.2. Подсчеты ярких галактик LEDA для всего неба
- 5.4.3. Радиальные подсчеты галактик выборки KLUN
- 6. Почему фрактальность важна для космологии**
- 6.1. Основные элементы космологических моделей**
- 6.1.1. Три главных эмпирических закона в космологии
- 6.1.2. Теоретические основы современной космологии
- 6.1.3. Стандартная космологическая модель

6.1.4. Фрактальные источники гравитационного поля

6.2. Происхождение и эволюция крупномасштабных фракталов: проблемы теоретических моделей

6.2.1. Закон Хаббла в пределах фрактального распределения галактик

6.2.2. Проблема происхождения фрактальной структуры

6.3. Космологический принцип

6.3.1. Космологический принцип Эйнштейна

6.3.2. Вывод однородности из предположения об изотропии

6.3.3. Космологический принцип Мандельброта

6.3.4. К согласию между Эйнштейном и Мандельбротом

7. Заключение и замечания

Литература

1. Введение

В данном обзоре обсуждаются исторические корни, методологические проблемы и современные результаты той области наблюдательной космологии, которая породила “Великий Спор” о фрактальности распределения галактик. Этот острый и порой драматичный спор был в центре внимания в течение почти всего XX века и остается таковым до сих пор. В нем принимали участие такие выдающиеся личности, как Эйнштейн, Хаббл, Сэндидж, Пиблс, Шарлье, Селети, Лундмарк, де Вокулер, Мандельброт, Пиетронеро и многие другие.

Дебаты о фрактальности крупномасштабного распределения галактик шел и вокруг двух новых фундаментальных эмпирических космических величин — фрактальной размерности D и максимального масштаба, на котором фрактальность переходит в однородность R_{hom} . Обсуждение кластеризации галактик началось с масштабов $1 \div 10$ Мпк, затем наблюдения крупномасштабной структуры сдвинулись на масштабы $10 \div 100$ Мпк, а теперь мы переходим на гигантские масштабы $100 \div 1000$ Мпк.

В последнее время появилось несколько статей и книг по анализу крупномасштабной структуры, близких к предмету данного обзора (Sylos Labini et al., 1998; Martinez & Saar, 2002; Gabrielli et al., 2004b далее обозначаемая GSLJP; Jones et al., 2004). Однако в них не хватает анализа исторической картины и методологических проблем как прошлых так и современных исследований. Этим вопросам посвящен настоящий обзор.

Фундаментальной задачей практической космологии является изучение распределения веще-

ства в пространстве и его эволюции во времени. Открытие сильной неоднородности пространственного распределения галактик на масштабах от галактик до сверхскоплений, т.е. на четырех порядках величины масштаба, имело глубокое космологическое значение. Удивительно богатая текстура галактик, о которой можно было только слегка догадываться по фотографическим обзорам, стала видна благодаря огромному прогрессу в измерении расстояний по красным смещениям для тысяч галактик. Наблюдаемая кластеризация является не просто случайным сгущиванием. Она подчиняется универсальному закону. Два основных теоретических инструмента — редуцированная корреляционная функция и условная плотность — выявили степенную зависимость концентрации галактик как функции радиуса шара на масштабах $0.1 \div 10$ Мпк. Этот характерный признак масштабной инвариантности, или фрактальности, открыл новое астрономическое приложение фрактальной геометрии, которая уже широко используется в современной статистической физике.

В данном обзоре мы приводим свидетельства в пользу фрактальности крупномасштабной кластеризации галактик. В разделе 2 дается краткое введение в понятие поля фрактальной плотности. В разделе 3 описываются основные статистические методы анализа распределения галактик. Раздел 4 посвящен главным аргументам за и против кластеризации галактик, которые обсуждались в эпоху каталогов угловых положений галактик. Подобные двумерные данные не содержат информации о расстоянии, и, что важнее, они не чувствительны к распределению с фрактальной размерностью $D \geq 2$. В разделе 5 обобщены результаты, полученные в современную трехмерную эпоху по обширным обзорам красных смещений, которые выявили “скрытую” фрактальную размерность, равную приблизительно 2, и обнаружили структуры на масштабах до 500 Мпк. Можно видеть, как значение $D=1.2$, выведенное по каталогам угловых положений, было заменено на $D=2.2 \pm 0.2$ в трехмерных картах, а максимальная наблюдаемая шкала фрактальности R_{hom} увеличилась с 10 Мпк до масштабов, приближающихся к 100 Мпк. В разделе 6 рассматривается космологическое значение наблюдаемой крупномасштабной фрактальности.

2. Фрактальный подход к крупномасштабной структуре Вселенной

В последние два десятилетия были выполнены первые обширные обзоры красных смещений галактик, которые позволили перейти от изучения углового распределения галактик на небесной сфе-

ре к анализу их трехмерного распределения в пространстве.

Уже первые обзоры красных смещений выявили богатое разнообразие структур, которые образуют галактики во Вселенной. Для их обозначения астрономы используют такие термины как двойные, триплеты, группы, богатые регулярные и иррегулярные скопления, стены, сверхскопления, пустоты, нити, ячейки, мыльные пузыри, губки, великие аттракторы, комья, концентрации, ассоциации. . . Конечно, каждый вид структуры заслуживает отдельного исследования, но их можно также рассматривать как естественное проявление одной глобальной господствующей сущности, называемой фракталом. Используя самоподобную структуру, можно описать все разнообразие неоднородных распределений галактик с помощью одного основного параметра — фрактальной размерности D , который определяет глобальную зависимость массы от радиуса во Вселенной.

Однако на то, чтобы в комковатом распределении галактик по небосводу распознать признаки фрактальной структуры, ушло много времени. Любопытно и полезно посмотреть, как идея о самоподобии, зародившись в древние времена, превратилась в первые протофрактальные модели.

2.1. Идея самоподобной Вселенной

2.1.1. Протофракталы

Предшественники фракталов упоминались еще в древних космологических размышлениях. В досократовской Греции философ Анаксагор из Клазомена (около 500 – 428 гг. до н.э.), который большую часть жизни преподавал в Афинах, выдвинул свою теорию “зародышей”. Сохранились только отрывки его текстов, но они создают впечатление, что его теория основывалась на идеях, напоминающих самоподобие (см., например, Grujić, 2001, 2002). В отличие от атомистов, Анаксагор считал, что материю можно дробить бесконечно. Известны его слова: “Во всех вещах есть частица всего”.

То, что Мандельброт назвал протофракталом, появилось в XVIII веке в виде иерархий в работах Сведенборга, Канта и Ламберта. Шведский ученый и мистик Эмануил Сведенборг (1688-1772) в возрасте 28 лет был назначен чрезвычайным асессором Шведской Горной коллегии. Весьма плодовитый мыслитель и писатель, он затронул практически все области науки своего времени. В 1734 году в своей книге “Principia” Сведенборг выдвинул замечательную точку зрения на самоподобие и космическую иерархию, которая была связана с его общим убеждением, что все в мире построено по единому плану. Следующие шаги сделали Им-

мануил Кант (1724-1804) и Иоганн Ламберт (1728-1777) со своими иерархическими системами. Например, Кант писал в своей книге, которая есть в переводе (Kant, 1955): “*Мы видим первые члены возрастающей связи миров и систем; и уже первая часть этой бесконечной прогрессии позволяет нам осознать, какие предположения можно сделать о целом. Конца не существует, есть безграничная . . . бездна*”.

Между моделями Канта и Ламберта была существенная разница. Кант и, возможно, Сведенборг, представляли себе, что иерархия продолжается бесконечно на более высокие уровни небесных систем: это была бесконечная иерархия. Ламберт думал, что после большого (в качестве примера он приводил цифру 1000), но конечного числа шагов иерархия обрывается. Он полагал, что звездные системы удерживаются вместе посредством притяжения темной массы: “. . . в конце концов, мы попадаем в центральную точку всей мировой структуры, и здесь я нахожу ту окончательную массу, которая правит всем мирозданием” (Lambert, 1761).

Джон Гершель (1792-1871), как и многие другие, был заинтригован загадкой темного неба, называемой парадоксом Ольберса (Harrison, 1987). В частном письме он наметил решение: “. . . легко представить себе такое строение буквально бесконечной Вселенной, в которой было бы сколько угодно направлений, на которых не встречается ни одной звезды. Это произойдет, например, если предположить, что она состоит из систем, разделенных на части по правилу, что тела более высокого порядка находятся намного дальше от центра, чем тела ближайшего более низкого порядка”.

Гершель имел в виду иерархическую систему звезд. В другом тексте он приводит в качестве примера спутники планет солнечной системы и большие расстояния между звездами и утверждает, что “*принцип подчиненной группировки*” принимает “*характер и важность космического закона*”.

2.1.2. Фурнье д’Альб и Карл Шарлье

Вновь вдохнул жизнь в идею об иерархической структуре Вселенной Эдмон Фурнье д’Альб (1868-1933). В 1907 году он опубликовал замечательную книгу “Два новых мира” (Fournier, 1907), в которой приводится математическое описание возможного иерархического распределения звезд. В мире Фурнье (рис.1) звезды распределены иерархически по сферическим скоплениям в бесконечном пространстве, так что масса внутри каждой сферы растёт

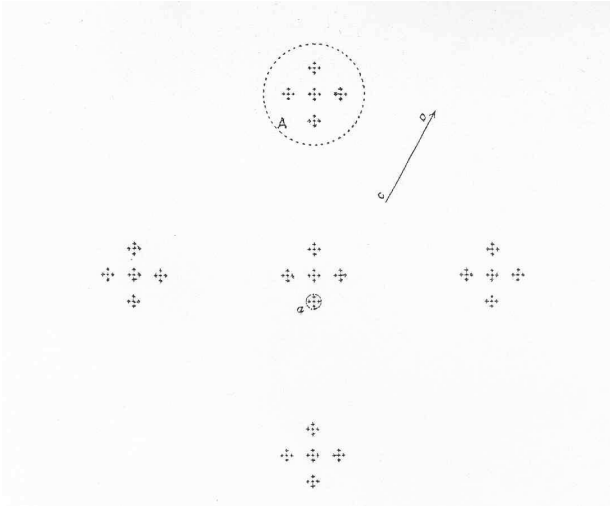


Рис. 1: Регулярная иерархическая модель мира Fournier (1907). Одни и те же элементы повторяются на разных уровнях самоподобным образом. Средняя плотность $\rho(R)$ в пределах масштаба R уменьшается с ростом масштаба R , следовательно, $\rho(R) \rightarrow 0$ for $R \rightarrow \infty$.

прямо пропорционально ее радиусу

$$M(R) \propto R. \tag{1}$$

Конечно, это делает ее резко отличной от соотношения между массой и радиусом в однородной Вселенной, в которой $M(R) \propto R^3$. Такова была идея Фурнье о том, как избежать космологических парадоксов, появляющихся во Вселенной Ньютона.

Дальнейшее развитие модели космической иерархии принадлежит шведскому астроному Карлу Шарлье (1908). Оно изложено в статье “Как может быть построен бесконечный мир” (Charlier, 1908). С энтузиазмом проштудировав книгу Фурнье, он разработал более общую модель звездных распределений, которые также решают парадокс Ольберса и загадку бесконечного гравитационного потенциала (Seeliger, 1895).

Шарлье нашел критерий, которому должна подчиняться иерархия, чтобы разрешить эти парадоксы. Решающим фактором является то, как быстро уменьшается плотность от одного уровня (i) к другому (i+1), а это зависит от отношения размеров последовательных элементов и числа N_{i+1} элементов более низкого уровня, образующих элемент более высокого уровня. Если обозначить размеры (радиусы) как R_i и R_{i+1} , то первый критерий Фурнье можно записать как

$$R_{i+1}/R_i \geq N_{i+1}, \tag{2}$$

или размер элемента более высокого уровня, деленный на размер элемента более низкого уровня, больше или равен числу элементов более низкого уровня, образующих элемент более высокого уровня. Например, иллюстрация Фурнье удовлетворяет первому критерию Шарлье: в ней $N_i = N_{i+1} = 5$, и отношение размеров всегда равно приблизительно 7.

В работе Charlier (1922) после примечания Selety (1922) был выведен второй критерий:

$$R_{i+1}/R_i \geq \sqrt{N_{i+1}}. \tag{3}$$

В терминах непрерывного соотношения масса-радиус для одинаковых частиц массой m первый критерий соответствует формуле $M(R) = mN(R) \propto R^1$. Вторым критерий есть $M(R) \propto R^2$, и этого достаточно, чтобы справиться с парадоксом Ольберса и бесконечной силой гравитации. Исходный критерий Фурнье (и первый критерий Шарлье) является более сильным условием, что позволяет ограничить гравитационный потенциал и скорости звезд.

2.2. Подлинно фрактальные структуры

Хотя иерархии Фурнье и Шарлье были, как нам теперь известно, слишком простыми для реального мира, в них содержались зародыши современной концепции подлинного фрактала. Регулярные иерархические модели (похожие на рис.1), содержат выделенные масштабы, соответствующие размерам скоплений каждого уровня “i”. На смену регулярным моделям иерархии пришли стохастические фракталы, огромным преимуществом которых является то, что их можно использовать для моделирования масштабно-инвариантного сгущения галактик, т.е. структур без выделенных масштабов (рис.2).

Хотя фрактальная геометрия появилась всего несколько десятилетий назад, некоторые ее элементы можно найти уже в работах Пуанкаре и Хаусдорфа столетней давности. Mandelbrot (1975) ввел термин “фракталы” и дал следующее его определение: “Фрактал — это множество, для которого хаусдорфова размерность строго больше топологической размерности”.

Мандельброт осознал, что фрактальная геометрия является мощным инструментом для описания систем, иррегулярных по своей сути. Природа наполнена сильно иррегулярными структурами. Деревья, облака, горы и молнии — знакомые объекты, общим свойством которых является то, что если представить малую их часть, то обнаруживается сложность, сравнимая со сложностью структуры в целом. Это есть геометрическое самоподобие.

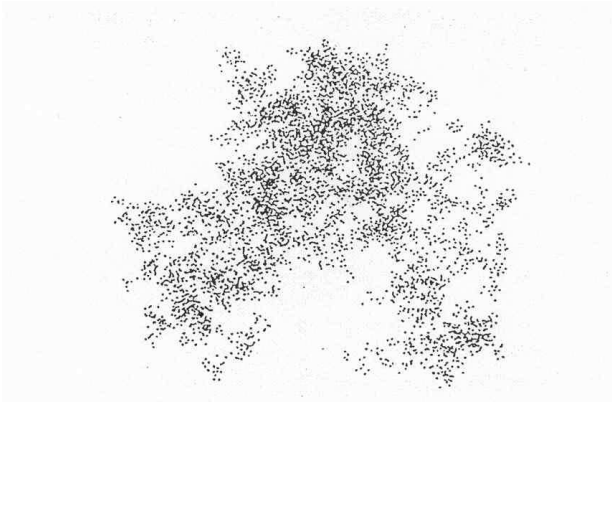


Рис. 2: Пример настоящей стохастической фрактальной структуры с размерностью $D=1.26$ в двумерном пространстве (Mandelbrot, 1989).

Фракталы просты, но трудно уловимы, как любит говорить Лучиано Пиетронеро, и знакомство с ними требует некоторой тренировки интуиции. Здесь мы кратко опишем существенные свойства фракталов, используемые в исследованиях распределения галактик. В качестве первоисточника мы рекомендуем книгу отца фракталов Mandelbrot (1982), а специальное математическое изложение см. в книге Falconer (1990).

Необходимо подчеркнуть, что, если свойство самоподобия действительно присутствует в распределении галактик, то оно может быть обнаружено с помощью адекватного анализа данных.

2.2.1. Самоподобие и степенной закон

Разница между самоподобным распределением и распределением с характерным внутренним масштабом четко изложена в работе Coleman & Pietronero (1992). С математической точки зрения самоподобие означает, что изменение масштаба длины r в b раз

$$r \rightarrow r' = br \quad (4)$$

сохраняет рассматриваемое свойство, представленное произвольной функцией $f(r)$, неизменным, за исключением перенормировки, которая зависит от b , но не зависит от переменной r . Это приводит к функциональному соотношению

$$f(r') = f(b \cdot r) = A(b) \cdot f(r). \quad (5)$$

Ему удовлетворяет степенная функция с любым показателем степени. Действительно, для

$$f(r) = f_0 r^\alpha \quad (6)$$

имеем

$$f(r') = f_0 (br)^\alpha = (b)^\alpha f(r). \quad (7)$$

Здесь показатель степени α определяет поведение функции везде. Не существует выделенного масштаба. Правда, условие для амплитуды $f(r_0)=1$ подразумевает некоторую длину r_0 .

$$r_0 = f_0^{-1/\alpha}, \quad (8)$$

и может появиться соблазн назвать r_0 характерной длиной, но для самоподобных структур это вводит в заблуждение! Степенной закон относится к фрактальной структуре, которая с самого начала была построена как самоподобная и, следовательно, не может обладать характерной длиной.

В уравнении (8) значение r_0 связано только с амплитудой степенного закона, а амплитуда не имеет ничего общего со свойством масштабности. В соотношении $f(r_0)=1$ для амплитуды вместо 1 можно было использовать любое другое число, чтобы получить другую длину. Это важный момент самоподобия: не существует эталонного значения (вроде средней плотности), по отношению к которому можно было бы определить, что большее, а что меньшее.

Такое поведение степенного закона контрастирует со случаем экспоненциальной функции, в которой имеется характерный параметр r_0

$$g(r) = g_0 e^{-r/r_0}, \quad (9)$$

определяющий выделенный масштаб изменения функции. В степенном законе постоянный безразмерный показатель степени α вообще не связан с масштабом длины.

2.2.2. Фрактальная размерность

Основной характеристикой фрактальной структуры является ее размерность. Фрактальная размерность — это мера “степени сингулярности” вокруг точек структуры. Если существует нулевой уровень структурных элементов, как в физических фракталах, в которых нет математической сингулярности, скорость роста плотности с уменьшением пространственного масштаба как раз и определяет фрактальную размерность.

Рассмотрим простейший пример регулярной фрактальной структуры, чтобы проиллюстрировать, как можно определить фрактальную размерность. Начиная с точки, занятой объектом, посчитаем, сколько объектов находится внутри сферы радиуса r , чтобы установить соотношение число элементов-радиус, из которого можно определить фрактальную размерность D . Предположим, что в структуре на рис.1 можно найти N_0 объектов с

массой m_0 в объеме размером r_0 . Если мы рассмотрим объем большего размера $r_1 = k_r \cdot r_0$, то найдем $N_1 = k_N \cdot N_0$ объектов. В самоподобной структуре параметры k_r и k_N будут одни и те же для всех масштабов. Таким образом, в общем случае, в структуре размера $r_n = k_r^n \cdot r_0$ у нас будет $N_n = k_N^n \cdot N_0$ объектов. Затем можно записать соотношение между числом N (или массой $M = m_0 N$) и размером r в виде:

$$N(r) = B \cdot r^D, \quad \text{от } M(r) = m_0 B \cdot r^D, \quad (10)$$

где фрактальная размерность равна показателю степени D этого степенного закона, т.е.

$$D = \frac{\log k_N}{\log k_r} \quad (11)$$

и определяется структурными параметрами k_r и k_N . Множитель B может быть выражен через параметры нулевого уровня N_0 и r_0

$$B = \frac{N_0}{r_0^D}. \quad (12)$$

Отметим, что уравнение (10) соответствует гладкому непрерывному представлению сильно флуктуирующей функции, как это очевидно из рис.1. Гладкий средний степенной закон для фрактальной структуры всегда сопровождается большими флуктуациями и кластеризацией на всех масштабах.

Простые алгоритмы построения стохастических фрактальных структур с заданной фрактальной размерностью можно найти, например, в книге GSLJP. С помощью этих алгоритмов можно построить искусственные каталоги галактик, полезные при тестировании различных методов структурного анализа.

2.3. Концепции поля плотности

Определение поля плотности является основой анализа крупномасштабных структур. Существует важная концептуальная разница между моделями с обычным и фрактальным полями плотности. Модель первого типа обычно используется для описания динамики газа или жидкости с корреляциями ближкодействия, тогда как фрактальная модель соответствует физическим системам с сильными флуктуациями, обусловленными корреляциями дальнего действия.

2.3.1. Обычные поля плотности жидкости и газа

Используемое в гидродинамике понятие плотности непрерывной среды (которая является аппроксимацией жидкости или газа) содержит предположение о том, что величина плотности не зависит от

размера элемента объема dV . Тогда можно определить плотность $\rho(\vec{x})$ в точке \vec{x} и рассматривать ее как обычную непрерывную функцию от положения в пространстве:

$$\rho_{fluid} = \rho(\vec{x}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(\vec{x}, V)}{V}, \quad (13)$$

где M — масса жидкости внутри объема V вокруг точки \vec{x} . Для обычной непрерывной среды существует предел, не зависящий от объема V , поскольку непрерывность достижима на достаточно малых масштабах, т.е. $M = \rho V$.

При изучении флуктуаций обычной жидкости можно рассматривать $\rho(\vec{x})$ как реализацию стохастического процесса, для которого определены обычные статистические моменты — среднее, дисперсия и т.п.

Модели обычных полей плотности идут под общим названием *коррелированные распределения в жидкости*. Они имеют однородный средний фон, на который накладываются коррелированные флуктуации. Пример такой регулярной флуктуации можно видеть в верхней части рис. 3. Основные свойства подобных распределений в сравнении с фрактальными распределениями обсуждаются в книге GSLJP.

Обычное *стационарное* стохастическое поле плотности $\rho(\vec{x})$ можно представить как сумму флуктуаций плотности $\delta\rho(\vec{x})$ и средней постоянной плотности $\rho_0 = \langle \rho(\vec{x}) \rangle$, так что

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0 + \delta\rho, \quad (14)$$

или, в терминах безразмерной относительной флуктуации плотности,

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\delta\rho(\vec{x})}{\rho_0}. \quad (15)$$

Заметим, что относительная флуктуация $\delta(x)$ в уравнении (15) может быть положительной и отрицательной в диапазоне $-1 \leq \delta(x) < \infty$, тогда как плотность всегда положительна $\rho(x) > 0$ для положительных масс частиц.

Обычно рассматривают $\delta\rho(\vec{x})$ как реализацию гауссова стохастического процесса, для которого фазы флуктуаций не коррелированы. Здесь фундаментальную роль играет средняя плотность $\rho_0 = \text{const} > 0$, которая должна существовать и быть хорошо определенной и положительной для каждой реализации случайного процесса $\rho(x)$. “Хорошо определенный” означает, что средняя плотность не зависит от размера и положения *достаточно/представительного* тестового объема.

2.3.2. Обычные стохастические дискретные процессы

Обычное поле плотности можно также представить дискретным стохастическим процессом, называемым стохастическим точечным процессом или распределением материальных точек. Здесь дискретность вносит некоторые новые аспекты, связанные с сингулярностью точечных частиц.

Важным примером *однородного* стохастического дискретного поля плотности является пуассоновский процесс, порождающий плотность числа (концентрацию) частиц $n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$. Согласно закону Пуассона, вероятность P найти N частиц в объеме V есть

$$P(N, V) = \frac{\langle N \rangle^N \exp(-\langle N \rangle)}{N!}, \quad (16)$$

где $\langle N \rangle = n_0 V$ — это среднее число частиц в объеме $V(r)$. Единственным параметром пуассоновского распределения является постоянная средняя концентрация частиц $n_0 = \langle n(\vec{x}) \rangle$ или интенсивность пуассоновского процесса. Она определяет характерный масштаб λ_0 для этого процесса

$$\lambda_0 \approx n_0^{-1/3} \approx R_{sep}, \quad (17)$$

который равен приблизительно среднему расстоянию между частицами, обозначаемому также как R_{sep} .

Нормированная дисперсия массы/числа частиц $\sigma^2(r)$ в сфере радиуса r определяется как

$$\sigma^2(r) = \frac{\langle N^2(r) \rangle - \langle N(r) \rangle^2}{\langle N(r) \rangle^2}, \quad (18)$$

и является важной величиной, характеризующей стохастический процесс как на малых, так и на больших пространственных масштабах r .

Шум дискретности. Материальные точки дискретного стохастического процесса, находящиеся на конечных расстояниях друг от друга, вызывают появление неизбежного *шума дискретности* или *флуктуационного шума*, когда рассматриваемые масштабы меньше среднего расстояния между частицами $r < R_{sep}$. Этот шум возрастает с уменьшением r как

$$\sigma(r) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \approx \left(\frac{r}{\lambda_0} \right)^{-3/2} \quad (19)$$

и становится бесконечно большим на очень малых масштабах.

Большие пространственные масштабы. На больших пространственных масштабах r распределение становится однородным. При этом его нормированная дисперсия (уравнение (19)) стремится к нулю как $1/\sqrt{N}$, когда число частиц бесконечно возрастает. Масштаб $R_{hom} \approx \lambda_0$ является

масштабом однородности пуассоновского процесса. Он определяется из условия, что нормированная дисперсия $\sigma^2(R_{hom})=1$.

Пуассоновское распределение является однородным стохастическим дискретным полем плотности *без корреляций*, так что его корреляционная функция равна нулю (не принимая во внимание так называемый “диагональный” член, соответствующий точечной сингулярности при $r=0$). Это означает, что положения точек не зависят друг от друга, т.е. никаких настоящих структур нет. Хотя иногда кажется, что структуры присутствуют — это просто случайные флуктуации, получающиеся в результате реализации некоррелированного процесса.

В статье Gabrielli et al. (2004a) рассматривается еще один важный пример — *сверходнородный дискретный процесс* возникающий в случае частиц находящихся в кристаллической решетке с небольшими коррелированными смещениями частиц вокруг регулярных узлов решетки. Подобный процесс используется для генерации начальных условий в моделировании космологической задачи N-тел.

2.3.3. Фрактальные поля плотности

При анализе крупномасштабной структуры Вселенной применяется понятие дискретного фрактального точечного процесса, для которого поле плотности можно представлять в виде пространственного распределения N -частиц в точках \vec{x}_a с массами m_a в объеме V . Тогда

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{a=1}^N m_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a). \quad (20)$$

В случае одинаковых частиц с $m_a = m$ можно просто использовать понятие поля плотности числа (или концентрации) частиц

$$n(\vec{x}) = \sum_{a=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_a). \quad (21)$$

Чтобы описать непрерывную иерархию кластеризации, которая является новой характеристикой фрактального стохастического процесса, сначала введем новую независимую переменную — радиус r сферического объема $V(r)$, в котором подсчитываются частицы. Тогда *фрактальную плотность массы* можно определить как функцию двух переменных — положения частицы \vec{x}_a и радиуса r этого объема

$$\rho_{fractal} = \rho(\vec{x}_a, r) = \frac{M(\vec{x}_a, V)}{V}, \quad (22)$$

где $M(\vec{x}_a, V)$ — масса внутри объема $V(r)$, расположенного вокруг частицы с координатой \vec{x}_a .

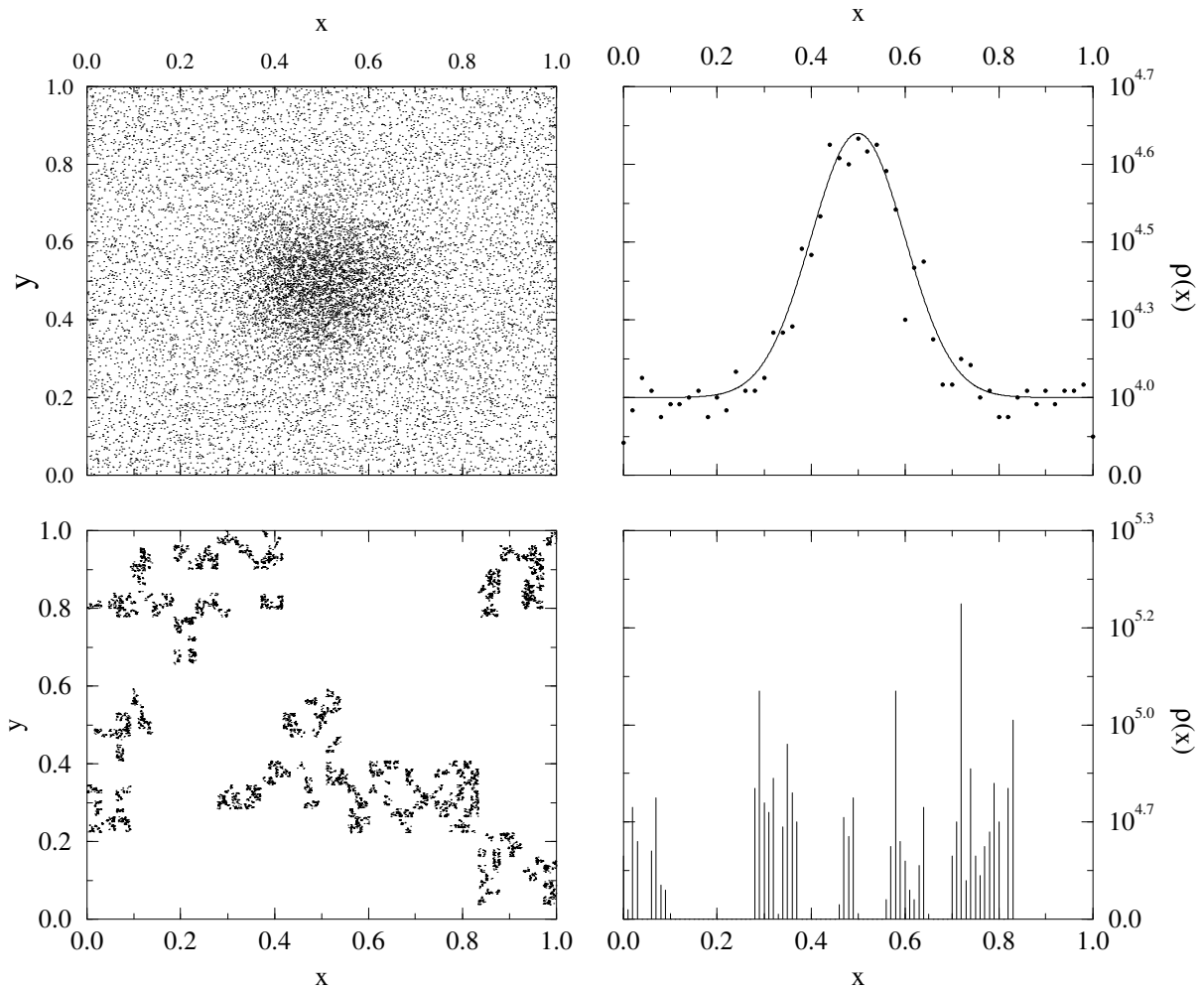


Рис. 3: Вверху: обычное регулярное (жидкость, газ) дискретное поле плотности: флуктуации на пуассоновском фоне; внизу: стохастическое фрактальное поле плотности (из статьи Sylos Labini et al., 1998).

Для математически бесконечного идеального фрактала число точек структуры в конечном объеме бесконечно, следовательно, масса тоже бесконечна. В физике эту проблему можно обойти с помощью некоторого естественного нижнего ограничения на размеры элементов, составляющих нулевой уровень иерархии. В таком случае можно говорить об основных структурных элементах — точечных частицах, обладающих массой. Тогда число частиц и масса внутри объема $V(r)$ конечна, т.е. в этом случае уравнение (22) определяет физически измеримую плотность. Хотя величина $\rho(\vec{x}_a, r)$ сильно меняется от одного положения частицы к другому, можно, как мы увидим далее, рассматривать статистическое среднее, которое является более устойчивой характеристикой фрактальной структуры.

На рис.3 сравниваются регулярная флуктуация плотности на пуассоновском фоне (как в обычной жидкости или газе) со стохастическими фрактальными флуктуациями плотности. В случае фрактальных структур обычное понятие плотности массы непрерывной среды не применимо. Это вызвано тем, что плотность массы можно определить, только если рассматриваются и положение \vec{x} , и объем V . В каждом объеме V , содержащем часть структуры, существует иерархия скоплений, и значение плотности массы сильно зависит от размера объема. Это принципиально отличается от случая обычной жидкости. Теперь не выполняется соотношение, заданное уравнением (13), и плотность растет неограниченно, когда объем стремится к нулю:

$$\{\rho_{fractal} \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow 0\} . \quad (23)$$

Если существуют основные элементы нулевого уровня, тогда определяется максимальное значение фрактальной плотности для этой структуры.

2.4. Специфические свойства фракталов

2.4.1. Степенное соотношение “плотность-радиус”

Характерной чертой фрактального поля плотности является степенное изменение плотности с ростом радиуса сферического объема $V(r)$ с центром в некоторой точке структуры. Мы можем проиллюстрировать это свойство для случая регулярной фрактальной структуры (рис.1), в которой число подэлементов внутри элемента более высокого уровня задается уравнением (10). Таким образом, в непрерывном представлении, используя уравнение (22), можно определить фрактальную концентрацию, которая связана с элементами радиуса r как

$$n_{V(r)} = \frac{N(r)}{V(r)} = \frac{3}{4\pi} B r^{-(3-D)}, \quad (24)$$

где D — размерность фрактальной структуры.

Следовательно, чтобы вычислить фрактальную плотность, можно начать с основного принадлежащего структуре элемента, подсчитать число объектов внутри сферы радиуса r и разделить его на объем сферы $V(r)$ с центром в этой точке. Помимо некоторой флуктуации, которая зависит от действительного положения точки внутри структуры, будет получен степенной закон (24).

Отметим, что получился результат, неожиданный для нашей обычной интуиции: плотность падает от любой точки фрактальной структуры. Создается впечатление, что центром структуры является любая точка, поскольку плотность в направлениях от нее падает согласно уравнению (24). Это свойство очень важно для космологических приложений фрактальных структур (раздел 6).

2.4.2. Массивные вселенные с нулевой плотностью

Важным следствием уравнения (24) является то, что в бесконечном пространстве фрактальное поле плотности отличается от обычного поля плотности жидкости для предельно больших объемов V :

$$\{\rho_{fractal} \rightarrow 0, \quad V \rightarrow \infty\} \quad (25)$$

Это свойство обусловлено тем, что с увеличением масштаба иерархические структуры все больше разжижаются, так что во фрактальной структуре постепенно начинают преобладать пустоты.

Следовательно, бесконечная фрактальная вселенная может содержать бесконечно большое число объектов (а, значит, бесконечную массу) одновременно с нулевой плотностью вселенной в целом. Это необычное свойство иерархической структуры использовалось в старых космологических моделях для того, чтобы избежать гравитационных и фотометрических парадоксов ньютоновской бесконечной Вселенной. Это следует из соотношений $\varphi \propto M/R$ и $F \propto M/R^2$.

2.4.3. Верхняя и нижняя границы

Реальные физические структуры обычно имеют минимальный R_{min} и максимальный R_{max} масштабы, между которыми физическая система следует фрактальному самоподобию. Эти масштабы называются *нижней* и *верхней* границами фрактальной структуры.

При изучении крупномасштабного распределения галактик считается, что нижняя граница R_{min} равна размеру галактики, так что галактики играют роль точечных частиц. Для различных космологических задач в качестве нижней границы можно выбрать различные масштабы, например, размеры скоплений темного вещества массой $10^{6 \div 8} M_{\odot}$, размеры звезд, комет, атомарных частиц. Так что нижняя граница является, как правило, хорошо определенной величиной.

При изучении распределения галактик определение верхней границы представляет собой более сложную проблему, которая до сих пор не решена. В принципе при анализе крупномасштабной структуры нужно применять методы, позволяющие прямо из обзора галактик находить масштаб $R_{max} = R_{hom}$, на котором распределение становится однородным. Однако подобные методы требуют обзора большого объема, размер которого должен превосходить этот масштаб в несколько раз.

К настоящему времени самые большие обзоры красных смещений галактик охватывают небольшую часть неба, что мешает уверенно оценить размер R_{hom} . Существует ли верхняя граница крупномасштабного распределения галактик и какова ее величина? Это основополагающие вопросы, вокруг которых идут самые жаркие споры.

2.4.4. Лакунарность

Две фрактальные структуры с одинаковой фрактальной размерностью могут выглядеть совершенно по-разному. В частности, при построении фрактальных моделей галактического распределения очень важным является то, насколько велик от-

носительный объем, занимаемый пустотами на заданном масштабе.

Мандельброт в своей работе (1982) назвал это свойство *лакунарностью* от латинского слова “лакуна”, означающего “дыра” или “бреешь”. Количественно лакунарность можно охарактеризовать константой пропорциональности F в соотношении

$$N_v(\lambda > \Lambda) = F\Lambda^{-D}, \quad (26)$$

где N_v — число пустот размером $\lambda > \Lambda$ внутри фиксированного объема в пределах структуры.

Еще одно определение ввели Blumenfeld & Mandelbrot (1997). Они использовали изменение множителя $B(\vec{x}_a)$ в законе плотности, вычисляемом для каждой структурной точки \vec{x}_a внутри шара с фиксированным радиусом R , $N(r, \vec{x}_a, R) = B(\vec{x}_a, R)r^D$ (уравнение 10). Тогда лакунарность определяется как нормированная дисперсия распределения этого множителя

$$\Phi = \frac{\langle (B - \bar{B})^2 \rangle_{\vec{x}_a}}{\bar{B}^2}. \quad (27)$$

Конкретные примеры структур внутри фиксированных выбранных объемов, имеющих разную лакунарность согласно этому определению, можно найти в книге Martinez & Saar (2002).

Отметим, что большая лакунарность фрактального процесса Релея-Леви послужила причиной того, что эта модель была отброшена как не соответствующая реальному распределению галактик (Peebles, 1980). Позже в статье Mandelbrot (1989) было продемонстрировано, что распределение галактик хорошо описывается фрактальными структурами с малой лакунарностью (см. рис.2).

2.4.5. Проекция и сечение

Свойства ортогональных проекций и сечений фрактальных структур играют важную роль при анализе выборок галактик с различной геометрией как для двумерных каталогов угловых положений, так и для трехмерных каталогов.

Ортогональная проекция. Пусть какой-то объект (структура) с фрактальной размерностью D , погруженный в евклидово пространство размерности $d=3$, проектируется ортогонально на евклидову плоскость с $d'=2$. Тогда, согласно общей теореме о проекции фракталов (см. Mandelbrot, 1982; Falconer, 1990), проекция как фрактальный объект получает фрактальную размерность D_{pr} , такую что

$$D_{pr} = D \text{ if } D < 2 \quad (28)$$

и

$$D_{pr} = 2 \text{ if } D \geq 2. \quad (29)$$

Например, в трехмерном пространстве структура с фрактальной размерностью $D \approx 2.5$ удовлетворяет уравнению (29) и, следовательно, ее проекция будет выглядеть как однородное распределение на плоскости ($D_{pr}=2$). Следовательно, ортогональная проекция скрывает фрактальные структуры с $D > 2$. Это имеет важные последствия для видимого распределения галактик на небе (раздел 4.4).

Сечение фрактала. Если объект с фрактальной размерностью D , погруженный в трехмерное евклидово пространство, пересекается с объектом фрактальной размерности D' , тогда, согласно закону аддитивности коразмерности (см. Mandelbrot, 1982; Falconer, 1990), размерность сечения D_{int} становится равной

$$D_{int} = D + D' - d. \quad (30)$$

Например, если фрактальная структура с $D=2$ в трехмерном пространстве пересекается плоскостью с $D'=2$, тогда мы получаем фрактальную размерность такого сечения $D_{int}=2+2-3=1$. Это свойство сечений объясняет, почему фрактальная структура с $D \approx 2$ может выглядеть как фрактал с $D \approx 1$ при исследовании масштабов, больших толщины слоя для выборки, взятой из обзора галактик в виде тонкой полосы на небесной сфере.

2.4.6. Мультифрактальные структуры

В простых фрактальных моделях крупномасштабной структуры обычно используются только пространственные положения галактик для некоторой выборки. Это позволяет описать распределение галактик с помощью всего лишь одного параметра — показателя экспоненты в степенном законе или фрактальной размерности структуры.

Реальные наблюдательные данные содержат также другую важную астрофизическую информацию для каждой галактики, такую как светимость, морфологический тип, спектральные свойства, звездное население и т.д. В этом случае масштабные свойства разных типов галактик могут различаться. Для учета зависимости распределения от этих параметров нужно ввести более общую модель, называемую *мультифрактальными* структурами, которые описываются непрерывным множеством фрактальных размерностей. Такой подход к распределениям галактик впервые был предложен в работе Pietronero (1987). Недавние обсуждения этой темы см. в GSLJP, Martinez & Saar (2002) и Jones et al. (2004).

Отметим, что из-за сложности проблемы (даже для фракталов нет единого определения) мультифрактальность можно рассматривать по-разному. Мультифракталы противоположны однородности

точно так же, как фракталы. В действительности мультифрактальная картина является уточнением и обобщением простых фрактальных моделей (Paladin & Vulpiani, 1987; Benzi et al., 1984).

2.5. Современные обзоры красных смещений и фотометрических расстояний

Долгое время астрономы могли делать только косвенные выводы о пространственном распределении галактик, основываясь на их положениях в двумерных картах на небесной сфере. Хороший обзор работ того времени имеется в книге Peebles (1980).

Ситуация совершенно изменилась за последние годы, когда стало возможно измерять пространственные положения галактик с помощью данных из обширных обзоров красных смещений. В настоящее время существует несколько подходов к исследованию пространственного распределения материи (светящейся и темной): фотометрические измерения расстояний, обширные обзоры красных смещений галактик и квазаров, анализ подсчетов галактик и изучение искажений изображений, вызванных слабым гравитационным линзированием. Все эти наблюдательные подходы показали, что кластеризация — это общее явление в мире галактик.

2.5.1. Обзоры красных смещений

Природа дала астрономам способ измерения внегалактических расстояний в виде линейного соотношения “красное смещение — расстояние”, который в общем более точен, чем фотометрические методы. Например, для дисперсии скоростей в 50 км/с, характерной для галактик поля, можно измерить расстояния с точностью около 1 Мпк. Чтобы получить таким способом глубокую пространственную карту окружающей Вселенной, нужно выполнить обзоры красных смещений, полные до достаточно слабой звездной величины.

Во *Втором Опорном Каталоге de Vaucouleurs*, de Vaucouleurs & Corwin (1976) были приведены красные смещения для более чем 2700 галактик. Это был прорыв, позволивший использовать красные смещения для составления карты структур, образуемых галактиками.

В статье Giovanelli & Haynes (1991) подчеркивается: “За последние пятнадцать лет прогресс в технологии как оптических, так и радиодетекторов и спектрометров вызвал потрясающий взрыв в количестве измеренных красных смещений галактик”. Скорость накопления данных до сих пор продолжает расти по экспоненте. В настоящее время известно более миллиона красных смещений,

в основном по оптическим спектрам. Эта “индустрия красных смещений” постоянно создает новые точки для трехмерных карт пространственного распределения галактик. На некоторых телескопах все наблюдательное время посвящается для измерений красных смещений.

Некоторые большие обзоры красных смещений уже завершены. Среди них известные под аббревиатурами CfA, SSRS, LCRS, ESP. Их важные параметры приведены в табл.1. Более подробную информацию читатель может найти в статье Sylos Labini et al. (1998). На основе этих обзоров появились трехмерные карты распределения галактик как широкоугольных, таких как CfA1, CfA2, SSRS1, SSRS2, Perseus-Pisces, LEDA, так и в виде узких полос на небесной сфере, таких как LCRS, ESP.

В последнее десятилетие появились особенно большие обзоры, содержащие сотни тысяч красных галактик: обзор галактических красных смещений с полем в два градуса 2dF (Colless et al., 2001, 2003) и слоановский цифровой обзор неба (Sloan Digital Sky Survey — SDSS, Loveday et al., 2002). Глубина этих галактических каталогов позволяет обнаружить и проанализировать структуры размером до 100 Мпк (см. рис. 4).

Пределы обзора. Обзор красных смещений ограничен в основном двумя величинами: предельной видимой звездной величиной обзора и пределом модуля расстояний, различного для разных абсолютных звездных величин. Кроме того, для структурного анализа важно иметь достаточно большое покрытие неба.

Число галактик на квадратный градус резко возрастает с ростом звездной величины. До $m \approx 15.5$ на кв. градус приходится примерно одна галактика, а до 19 зв. вел. — примерно 85. С этим можно справиться с помощью современной МОС (мультиобъектный спектрограф) аппаратуры, позволяющей измерять одновременно несколько сотен спектров галактик в поле телескопа. Даже если выборка полна до некоторого предела видимой звездной величины, ее полнота по объему зависит от абсолютной зв. величины: для галактик с абсолютной величиной M предел пространственной полноты обзора равен модулю расстояния

$$\mu_{lim} = m_{lim} - M. \quad (31)$$

Например, при $m_{lim}=15.5$ и $M=-20$, $\mu=35.5$, что соответствует расстоянию $r_{lim}=125$ Мпк (соответствующему $9300 h_{75}$ км/с). С другой стороны, галактики с $M=-18$ будут полно представлены в выборке только до $r_{lim}=50$ Мпк ($3700 h_{75}$ км/с). Это показывает, что обзоры красных смещений зондируют распределение только самых ярких галактик на больших расстояниях, что может

Таблица 1: *Некоторые обзоры галактик. В колонках даны: название обзора, телесный угол Ω , охватываемый обзором, предел видимой звездной величины, полное число галактик N , метод определения расстояния.*

Каталог	Ω (стерад.)	m_{lim}	N	Индикатор расстояния	Ссылка
CfA1	1.83	14.5	1845	z	Huchra et al., 1988
CfA2 (North)	1.23	15.5	6478	z	de Lapparent et al., 1988
PP	0.9	15.5	3301	z	Haynes & Giovanelli, 1988
SSRS1	1.75	14.5	1773	z	Da Costa et al., 1991
SSRS2	1.13	15.5	3600	z	Da Costa et al., 1994
Stromlo-APM	1.3	17.15	1797	z	Loveday et al., 1992
LEDA	4 π	16.0	25156	z	web site
LCRS	0.12	17.5	26000	z	Shectman et al., 1996
IRAS 2Jy	4 π	2. Jy	2652	z	Strauss et al., 1992
IRAS 1.2Jy	4 π	1.2 Jy	5313	z	Fischer et al., 1996
ESP	0.006	19.4	4000	z	Vettolani et al., 1997
KLUN	4 π	15	6500	TF	Theureau et al., 1997
KLUN+	4 π	16	20000	TF	Theureau et al., 2004
Local Volume	4 π	< 500 км/с	300	RGS	Karachentsev et al., 2003b
2dF	0.27	19.5	250 000	z	web site
SDSS	π	19	10 ⁶	z	web site

вызвать искажение картины. Единственный способ справиться с этой проблемой — это расширять обзоры до все более и более слабых предельных звездных величин, поскольку нельзя заранее сказать, является ли конкретно взятая галактика яркой или слабой (или является ли она далекой или сравнительно близкой).

2.5.2. Каталоги галактик, основанные на фотометрических расстояниях

Для изучения крупномасштабной структуры каталоги красных смещений оказываются более удобными, чем каталоги, основанные на фотометрических расстояниях: 1) на составление каталогов красных смещений уходит намного меньше времени, 2) как правило, фотометрические расстояния менее точны, чем расстояния, полученные по красным смещениям, 3) красные смещения можно измерить для галактик всех хаббловских типов.

С другой стороны, фотометрические расстояния ценны для исследования структуры сами по себе. Их можно использовать для составления карты Локального Объема и для получения закона падения плотности числа галактик вокруг нас.

Поскольку красные смещения галактик, особенно входящих в группы и скопления, дают только приблизительную оценку расстояний, Игорь Караченцев в CAO РАН начал грандиозную про-

грамму измерения расстояний до близких галактик, используя светимости самых ярких голубых и красных звезд в них (Karachentsev & Tikhonov, 1994; Karachentsev et al., 1997) и светимости звезд на вершине ветви красных гигантов (Karachentsev et al., 2003b). За последние 10-15 лет многие близкие галактики были впервые разрешены на звезды. Эта программа, требующая больших затрат труда и наблюдательного времени на крупнейших наземных телескопах и космическом телескопе им. Хаббла, еще не завершена. До настоящего времени были измерены расстояния примерно до 150 галактик, расположенных в пределах $9h_{50}^{-1}$ Мпк (Karachentsev et al., 2003b).

В последние годы были предприняты усилия по увеличению выборки Локального Объема. Специальные обзоры неба в линии 21 см (Kilborn et al., 2002), инфракрасные и радиообзоры Зоны Избегания (Kraan-Korteeg & Lahav, 2000) и поиски новых карликовых галактик низкой поверхностной яркости по пластинкам POSS-II и ESO/SERC (Karachentseva & Karachentsev, 1998, 2000) позволили увеличить число галактик Локального Объема более чем в два раза.

Внутренним примером выборки галактик с фотометрическими расстояниями до ≈ 100 Мпк является выборка KLUN и ее следующая версия KLUN+ (см. домашнюю страницу в <http://klun.obs-nancay.fr/KLUN+>). В ней содер-

жатыся тысячи спиральных галактик, для которых были измерены и фотометрические звездные величины, и ширина линии нейтрального водорода 21 см. С помощью соотношения Талли-Фишера эти две величины (должным образом исправленные и редуцированные в однородные системы) позволяют оценить расстояние до галактики. Первоначально задуманный для измерения постоянной Хаббла обзор KLUN, включающий 5500 галактик, использовался для изучения радиального распределения плотности числа галактик вокруг нашей Галактики (Teerikorpi et al., 1998).

Новая программа KLUN+ является Ключевым Космологическим Проектом на реконструированном радиотелескопе в Нанси во Франции. Планируется выполнить обзор HI для составления выборки 20000 спиральных галактик, покрывающих 80% неба, видимого из Нанси ($\delta > -40^\circ$), с уникально большой границей по звездной величине. В статье Theureau et al. (2004) дана информация и первые результаты новых измерений HI. Фотометрия берется из данных DENIS (Near Infrared Survey — обзор в близком инфракрасном диапазоне) и 2MASS (2 Micron All Sky Survey — обзор всего неба на длине волны 2 микрона). Целью является построение выборки, полной до определенной звездной величины в пяти фотометрических полосах В, I, J, H и К (в более раннем обзоре KLUN были только величины В и диаметры).

Все эти данные дадут возможность изучать крупномасштабное распределение галактик независимо от красных смещений, используя различные статистические методы, которые мы описываем в разделе 3.

2.5.3. Как обнаружить фрактальные структуры

По трехмерной карте, показанной на рис. 4 (SDSS), можно на глаз распознать структуры различного размера до 100 Мпк. Однако количественный анализ наблюдаемых неоднородностей в пространственном распределении галактик — трудная задача, вокруг которой продолжают споры о фрактальности наблюдаемых структур.

Чтобы понять смысл выводов, полученных в результате обработки наблюдательных данных, целесообразно исследовать особенности и ограничения используемых методов анализа. В следующем разделе, посвященном этим вопросам, обсуждаются основные математические инструменты, применяемые для обнаружения фрактальных структур. Мы ограничимся рассмотрением методологических вопросов, возникающих при практическом применении методов анализа выборок галактик.

3. Статистические методы обнаружения фрактальных структур

Для анализа двумерных (угловые распределения) и трехмерных (пространственные распределения) каталогов галактик используются различные статистические методы. Достаточно полный обзор математических подходов к описанию крупномасштабного распределения галактик можно найти в книге Martinez & Saar (2002).

Здесь мы ограничимся обсуждением фрактального подхода. Подробное описание подобных методов анализа распределения галактик приводится в работах Sylos Labini et al. (1998) и книге GSLJP.

Одной из наших целей является сравнение стандартного метода корреляционной ξ -функции (Peebles, 1980, 1993) с фрактальным подходом (Pietronero, 1987; GSLJP). Мы покажем, что для изучения распределения галактик очень существенно использовать те математические инструменты, которые адекватны реальным структурам. Особенно важно использовать неискаженные оценки для измерения фрактальной размерности и пределов фрактальности.

3.1. Определения корреляционных функций

Теория стохастических процессов вводит и исследует различные функции, предназначенные для корреляционного анализа (см., например, Раздел 2 в книге GSLJP).

3.1.1. Полная и редуцированная корреляционные функции

Полная двухточечная корреляционная функция $R_{\mu\mu}$ (мы называем ее просто *полной корреляционной функцией*) стационарного изотропного процесса $\mu(\vec{r})$ определяется как

$$R_{\mu\mu}(r) = \langle \mu(\vec{r}_1)\mu(\vec{r}_2) \rangle, \quad (32)$$

где $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ — взаимное расстояние между рассматриваемыми точками, а выражение в $\langle \rangle$ обозначает математическое ожидание по всем реализациям стохастического процесса.

Учитывая истинно постоянное среднее значение процесса μ_0

$$\mu_0 = \langle \mu(\vec{r}) \rangle = \text{const}, \quad (33)$$

можно определить *двухточечную корреляционную функцию* C_2 для флуктуаций вокруг μ_0 (мы называем ее просто *приведенной корреляционной функцией*) как

$$C_2(r) = \langle (\mu(\vec{r}_1) - \mu_0)(\mu(\vec{r}_2) - \mu_0) \rangle = R_{\mu\mu}(r) - \mu_0^2. \quad (34)$$

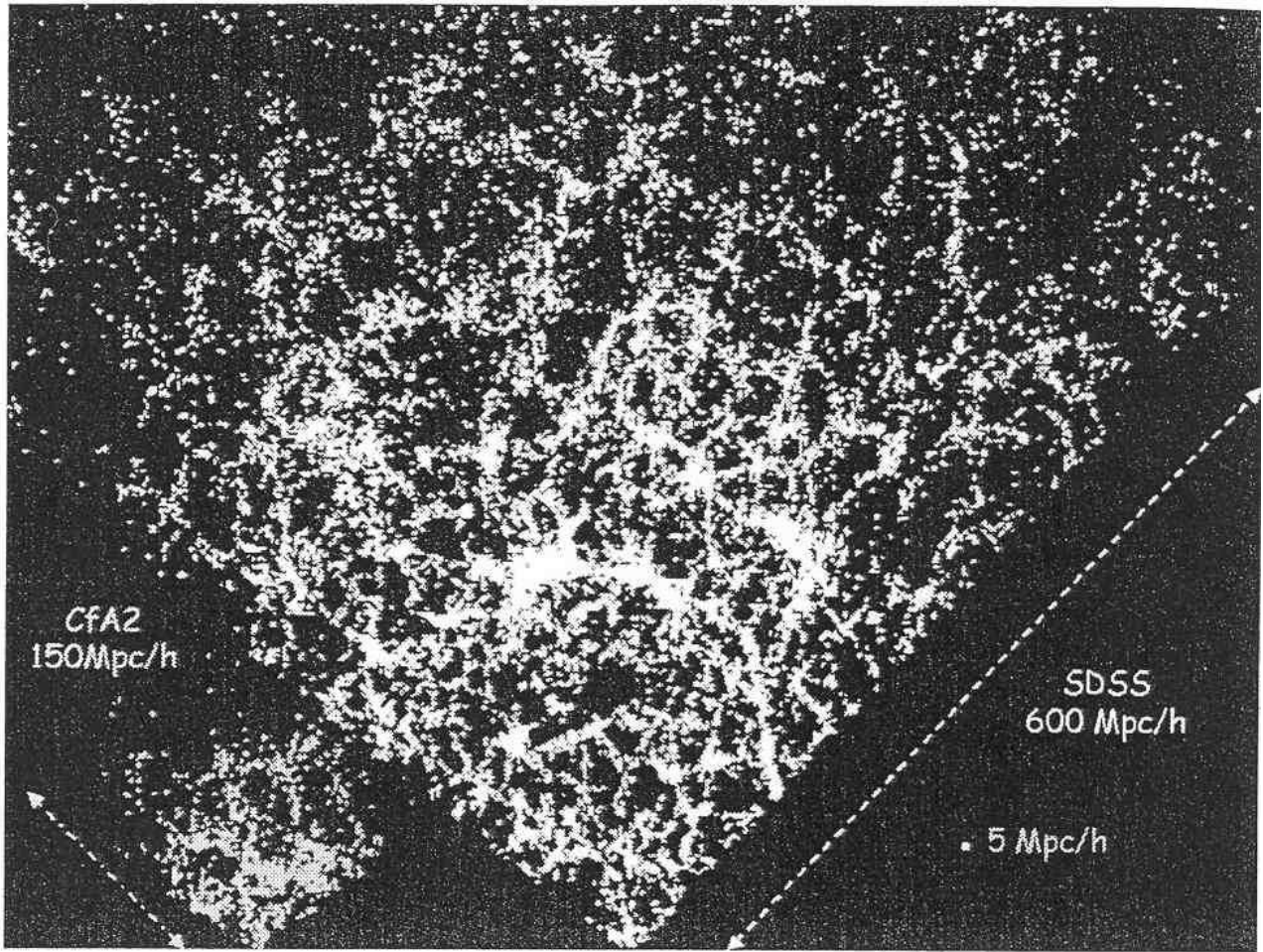


Рис. 4: Крупномасштабная структура, согласно каталогу CfA и первой реализации обзора красных смещений галактик SDSS (из статьи Courtois et al., 2004). Хорошо видны различные типы структур на масштабах около 100 Мпк.

Для $r=0$ она дает среднеквадратичную дисперсию процесса $\sigma_\mu^2 = C_2(0)$.

Подчеркнем важную разницу между полной и редуцированной корреляционными функциями $R_{\mu\mu}(r)$ and $C_2(r)$. Для стохастического процесса со степенными дальнедействующими корреляциями полная корреляционная функция $R_{\mu\mu}(r)$ имеет степенную форму, тогда как, согласно определению (34), приведенная корреляционная функция $C_2(r)$ в этом случае не может быть степенной.

3.1.2. Вариация массы в сферах и характерные масштабы

В обсуждаемых приложениях стохастический процесс $\mu(\vec{r})$ будет описывать поле плотности $\rho(\vec{r})$.

Условная и безусловная функции. Важно отличать *условные* и *безусловные* функции (или статистики). Например, если рассматриваются такие

статистики, которые определяются с условием, что существует фиксированная точка-частица, относительно которой рассматриваются другие частицы процесса, тогда говорят об *условной* функции. Ниже мы увидим, что оба основных инструмента анализа крупномасштабной структуры — Γ - и ξ -функции — являются *условными* корреляционными функциями.

Примером безусловной статистики являются оценки флуктуаций массы (числа) внутри сферы радиуса R . В дополнение к $\rho(\vec{r})$ определим новую стохастическую переменную $M(R)$ как

$$M(R) = \int_{V(R)} \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (35)$$

Для заданного радиуса R флуктуации этой массы, вычисленные в разных точках пространства, можно охарактеризовать *нормированной дис-*

персией массы $\sigma_M^2(R)$:

$$\sigma_M^2(R) = \frac{\langle M(R)^2 \rangle - \langle M(R) \rangle^2}{\langle M(R) \rangle^2}, \quad (36)$$

где

$$\langle M(R) \rangle = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3 \quad (37)$$

и для объема $V = V(R)$

$$\langle M(R)^2 \rangle = \int_V d^3r_1 \int_V d^3r_2 \langle \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) \rangle. \quad (38)$$

Здесь не существует условия для локализации центра сферы, который можно поместить где угодно в пространстве внутри выборки, независимо от положений частиц, в том числе и “между” ними.

Масштаб однородности. Наше интуитивное понимание однородности можно формализовать с помощью переменной $M(R)$. Например, *масштаб однородности* R_{hom} можно определить как масштаб, на котором $\sigma_M^2(R_{hom})=1$ (или любое другое пороговое значение). Это означает, что можно рассматривать распределение частиц как приближающееся к однородности, если средняя флуктуация массы внутри сфер радиуса R_{hom} равна примерно средней массе $\langle M(R_{hom}) \rangle$. Этот масштаб хорошо определен, когда $\sigma_M^2(R) \rightarrow 0$ для $R > R_{hom}$.

Длина корреляции. Другим характерным масштабом является длина корреляции R_{cor} , которая не зависит от амплитуды корреляционной функции и просто характеризует скорость убывания корреляционной функции. Длина корреляции может быть бесконечной, как в случае степенной корреляции $R_{\mu\mu}(r) \propto r^{-\gamma}$, или конечной, как для экспоненциальной корреляционной функции $R_{\mu\mu}(r) \propto e^{-r/R_{cor}}$.

3.2. Метод корреляционной ξ -функции

Широко используемым классическим подходом к анализу крупномасштабной структуры является метод корреляционной ξ -функции. Впервые он был применен к анализу галактик Totsuji & Kihara (1969), которые заимствовали его из статистической физики флуктуаций плотности обычного газа (см. например, Landau & Lifshitz, 1958). Метод был развит далее и активно применялся к галактическим данным Peebles (1980, 1993) и другими (см. последние обзоры Martinez & Saar, 2002; Jones et al., 2004).

3.2.1. Корреляционная ξ -функция Пиблса

Согласно Peebles (1980), *двухточечная корреляционная функция* $\xi(r)$ определяется как безразмерная *редуцированная корреляционная функция*

флуктуаций плотности $\delta\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \rho_0$ вокруг средней плотности ρ_0

$$\xi(r) = \frac{\langle \delta\rho(\vec{r}_1) \delta\rho(\vec{r}_2) \rangle}{\rho_0^2} = \frac{\langle \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) \rangle - \rho_0^2}{\rho_0^2}. \quad (39)$$

Фактически, ξ -функция Пиблса — это просто редуцированная корреляционная функция (уравнение (34)), деленная на квадрат среднего значения процесса (уравнение (33)), т.е.

$$\xi(r) = C_2(r)/\rho_0^2. \quad (40)$$

В случае распределения одинаковых частиц (с массами $m = m_0$) используется концентрация $n(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/m_0$, для которой среднее равно $\langle n(r) \rangle = n_0$. Тогда

$$\xi(r) = \frac{\langle n(\vec{r}_1) n(\vec{r}_1 + \vec{r}) \rangle}{n_0^2} - 1. \quad (41)$$

Эта безразмерная функция измеряет корреляции флуктуаций относительно постоянной средней плотности n_0 .

В теории стохастических процессов обычно рассматривается *нормированная корреляционная функция*, которая определяется как $K_{\mu\mu}(r) = C_2(r)/\sigma_\mu^2 = (R_{\mu\mu}(r) - \mu_0^2)/\sigma_\mu^2$. Тогда существует условие нормировки $K_{\mu\mu}(0) = 1$. Определение ξ -функции (уравнение (39)) подразумевает условие $\xi(0) = \sigma_\rho^2/\rho_0^2$.

Определение через пуассоновский процесс. Корреляционную функцию можно также определить как меру отклонения распределения частиц от пуассоновского (однородного) распределения (Peebles, 1980). В этом случае рассматриваются две бесконечно малые сферы в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 с объемами dV_1 и dV_2 и расстоянием между ними \vec{r}_{12} . Тогда суммарная вероятность найти одну частицу в объеме dV_1 и другую частицу в объеме dV_2 пропорциональна числу пар dN_{12}

$$dN_{12} = n_0^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(\vec{r}_{12})], \quad (42)$$

где n_0 — средняя по ансамблю концентрация частиц, а функция $\xi(\vec{r}_{12})$ измеряет отклонение от пуассоновского распределения. Это определение подразумевает, что для пуассоновского процесса $\xi(\vec{r}_{12})=0$ автоматически. Для статистически изотропного распределения функция $\xi(\vec{r}_{12}) = \xi(r)$ зависит только от расстояния r . Для случая, когда объект выбирается из выборки случайным образом, вероятность того, что у него есть сосед на расстоянии r в dV (т.е. $4\pi r^2 dr$) пропорциональна ожидаемому числу соседей dN

$$dN = n_0 dV [1 + \xi(r)]. \quad (43)$$

Здесь $\xi(r)$ считается той же двухточечной функцией корреляции, что определена уравнением (42) (см. Раздел 33 в работе Peebles, 1980).

Это вероятность обнаружить избыточное число частиц относительно пуассоновского распределения на расстоянии $r > 0$ при условии, что в точке $r=0$ находится какая-то частица.

3.2.2. Оценки ξ -функции

В теории стохастических процессов важно делать различие между функциями (например, $\xi(r)$), определенными через среднее по ансамблю, и их оценками $\hat{\xi}(r)$, например, при применении к конечной выборке галактик.

Чтобы оценить двухточечную функцию корреляции по имеющимся данным выборки из N_s объектов в пределах объема V_s обычно используется метод, основанный на искусственно сгенерированном пуассоновском процессе, который заполняет тот же объем V_s выборки. Тогда ξ -функция для заданного масштаба r оценивается как отношение числа пар с таким расстоянием между ними в выборке к числу таких пар в искусственном пуассоновском распределении.

Существует несколько видов оценок (Kerscher et al., 2000; Martinez & Saar, 2002; GSLJP), разница между которыми состоит главным образом в способе коррекции краевых эффектов. Например, оценка Дэвиса-Пиבלса приписывает точкам вес в соответствии с той частью объема сферической оболочки, которая содержится в объеме выборки. Она имеет вид

$$\hat{\xi}(r) = \left(\frac{N_{rd}}{N_s - 1} \right) \frac{N_p(r)}{N_{p,rd}(r)} - 1. \quad (44)$$

Здесь $N_p(r)$ — число пар “данные-данные” наблюдаемых объектов в каталоге, расстояние между которыми находится в интервале $r, r + dr$. $N_{p,dr}(r)$ берется из объединенного каталога данных и искусственных случайных распределений в том же объеме V_s . Это число пар “данные-случайные” с расстоянием r в объединенном каталоге. N_s и N_{rd} — полные числа объектов в реальной выборке и случайном распределении соответственно.

Важным предположением метода корреляционной функции является гипотеза об однородности, согласно которой истинное среднее количество объектов n_0 оценивается по наблюдаемой выборке как

$$\hat{n}_0 = \bar{n} = \frac{N_s}{V_s} \quad (45)$$

с высокой формальной точностью $\sigma_{n_0} \approx 1/\sqrt{N_s}$, где N_s — полное число объектов в объеме V_s “представительной” выборки, о которой предполагается, что она действительно представляет однородное распределение галактик во всей Вселенной.

3.2.3. Условие нормировки для оценок ξ -функции

Важный момент, связанный с оценками ξ -функции, был подчеркнут в работах Pietronero (1987) и Calsetti et al. (1988) и более подробно в книге GSLJP. А именно, определение корреляционной функции как отклонения от пуассоновского распределения (уравнение (43)) подразумевает интегральное условие для ξ -функции, оцениваемой по конечной выборке галактик.

Это следует из того факта, что для любой выборки с конечным числом галактик N_s в объеме V_s оценка средней величины плотности $\bar{n} = N_s/V_s$. Интегрируя левую часть уравнения (43) по объему выборки, получаем

$$\int_{V_s} dN = N_s - 1, \quad (46)$$

где $N_s - 1$ — число соседей, т.е. полное число частиц в объеме V_s без одной, относительно которой считается соседство. Тогда интеграл по правой части уравнения (43) по объему выборки дает

$$N_s - 1 = \int_{V_s} \bar{n} dV + \bar{n} \int_{V_s} \hat{\xi}(r) dV. \quad (47)$$

Первый член справа $\int_{V_s} \bar{n} dV = N_s$ есть полное число частиц в выборке. Следовательно, второй член будет удовлетворять условию

$$\int_{V_s} \hat{\xi}(r) dV = -\frac{1}{\bar{n}} \quad (48)$$

или в безразмерной форме

$$\int_{V_s} \hat{\xi}(r) \frac{dV}{V_s} = -\frac{1}{N_s}. \quad (49)$$

В случае коррелированных распределений в жидкостях и газах эффективная концентрация частиц может быть произвольно большой и, следовательно, условие (48) превращается в

$$\int_{V_s} \hat{\xi}(r) dV = 0. \quad (50)$$

Именно это ограничение является причиной противоречивых результатов, полученных при анализе крупномасштабной структуры методом ξ -функции. В частности, мы имеем в виду неизбежное нестепенное поведение оценки ξ . Из уравнений (48) и (50) следует, что существует расстояние r_z , при котором значение функции $\hat{\xi}(r_z) = 0$. В этой точке оценка корреляционной функции меняет знак с положительного на отрицательный, что невозможно для степенной функции.

3.2.4. Систематическое искажение истинного степенного закона оценкой $\hat{\xi}$

Как было показано выше, если полная корреляционная функция является степенной, тогда ни $\xi(r)$, ни $\hat{\xi}(r)$ не могут быть степенными функциями. Тем не менее, на практике $\hat{\xi}(r)$ обычно представляется в виде

$$\hat{\xi}(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}, \quad r_1 < r < r_2, \quad (51)$$

справедливым для некоторого диапазона масштабов $r_1 < r < r_2$. Здесь параметр r_0 определяет амплитуду ξ -функции.

Из такого степенного представления обычно получают две величины: *единичный масштаб* r_0 и *показатель степени корреляции* γ . Подчеркнем, что условие нормировки (уравнение (49)) неизбежно приводит к систематическому искажению значений масштаба однородности и показателя степени истинной полной корреляционной функции $R_{\mu\mu}(r)$, описывающей поле плотности.

Единичный масштаб r_0 (который часто неправильно называют длиной корреляции) определяется из соотношения

$$\hat{\xi}(r_0) = 1, \quad (52)$$

которое характеризует амплитуду флуктуаций плотности на масштабе r_0 . Фактически, этот параметр является искаженным значением истинного масштаба однородности, если это истинное значение равно или больше, чем размер максимальной сферы, полностью погруженной в объем выборки V_s .

Показатель степени корреляции γ в степенном представлении функции $\hat{\xi}(r)$ (уравнение (51)) правильно описывает только ограниченный интервал масштабов $r_1 < r < r_2$. На масштабах $r > r_2$ он не представляет истинного значения показателя степени, поскольку здесь оцениваемая величина искажается по мере того, как условие нормировки (уравнение (49)) заставляет функцию $\hat{\xi}(r)$ отклоняться от истинного степенного закона и пересекать нулевой уровень. Это приводит к зависимости γ от r и как далее будет показано, на единичном масштабе r_0 измеренный показатель степени вдвое больше истинного (раздел 3.4.1).

На масштабах $r < r_1$ истинное значение показателя степени искажается из-за шума дискретности, который ведет себя как $\sigma \propto r^{-3/2}$ (уравнение (19)). Ошибка будет сильно возрастать для масштабов, меньших среднего расстояния между частицами в выборке (например, $r < \lambda_0$). Далее мы увидим примеры того, как это произошло при анализе данных о распределении галактик.

3.2.5. Пространство красных смещений и поле пекулярных скоростей

Из обзора красных смещений галактик получается карта в пространстве красных смещений, т.е. координаты $(\alpha, \delta, z_{obs})$, в которых α, δ — положение на небе, а z_{obs} — наблюдаемое красное смещение галактики в выборке. Величина z_{obs} , в принципе, содержит все возможные вклады от различных физических причин согласно соотношению

$$1 + z_{obs} = (1 + z_{cos})(1 + z_v)(1 + z_\phi)(1 + z_{new}). \quad (53)$$

Здесь z_{cos} — это космологическое красное смещение, определяющее истинное расстояние галактики $r_{gal}(z)$, вычисленное по эмпирическому соотношению “расстояние — красное смещение” (т.е. по закону Хаббла, который дает $r_{gal} = cz_{cos}/H_0$) или по принятой космологической модели для больших красных смещений, z_v — компонента красного смещения, обусловленная пекулярной скоростью галактики, z_ϕ — гравитационная часть красного смещения, обусловленная локальным гравитационным потенциалом галактики (например, в скоплении), а z_{new} — возможная компонента, обусловленная неизвестной космологической причиной.

Ошибка расстояния, обусловленная пекулярной скоростью. Рассмотрим влияние поля пекулярных скоростей на оценку расстояния. Для пекулярных скоростей $v \ll c$ доплеровская часть наблюдаемого красного смещения определяется радиальной компонентой v_r скорости как

$$z_v \approx v_r/c. \quad (54)$$

Таким образом, для малых радиальных пекулярных скоростей v_r мы получаем

$$z_{obs} = z_{cos} + \frac{v_r}{c} (1 + z_{cos}). \quad (55)$$

Следовательно, истинное пространственное распределение галактик будет искажено полем пекулярных скоростей по лучу зрения

$$r_{||obs} = r_{||} + \Delta r_v \quad (56)$$

на величину

$$\Delta r_v = \frac{v_r(1 + z_{cos})}{H_0} = 5\text{Mpc} h_{100}^{-1} \frac{v_r(1 + z_{cos})}{500\text{km/s}}. \quad (57)$$

Отметим, что множитель $(1 + z_{cos})$ приводит к увеличению влияния v_{pec} на искажение расстояния для глубоких обзоров красных смещений.

ξ -функции в реальном пространстве и пространстве красных смещений. Непосредственно наблюдаемая ξ -функция называется *корреляционной функцией в пространстве красных смещений* $\xi_z(s)$. Чтобы получить истинную корреляционную функцию в реальном пространстве $\xi_{real} = \xi(r)$

нужно выделить и удалить все некосмологические вклады в z_{obs} . Это трудная задача, поскольку она требует а priori знания поля пекулярных скоростей, полной массы вокруг каждой галактики и ограничений на новую физику.

Форма наблюдаемой функции $\xi_z(s)$ определяется характером поля пекулярных скоростей. В вирialized скоплениях дисперсия скоростей приводит к так называемому эффекту “пальцев Бога”, т.е. протяженным формам вдоль направления луча зрения r_{\parallel} . Средняя тенденция галактик на крупных масштабах приближаться друг к другу из-за гравитации крупно-масштабных структур будет проявляться как сжатие функции $\xi_z(s)$ в направлении r_{\parallel} . Так как два этих эффекта связаны с разными пространственными масштабами, они не компенсируют друг друга.

В работах Peebles (1980, раздел 76) и Davis & Peebles (1983) предлагается процедура восстановления истинной функции $\xi(r)$ и относительного распределения пекулярных скоростей $f(v)$ по наблюдаемой корреляционной функции $\xi_z(r_{\perp}, r_{\parallel obs})$, где r_{\perp} и $r_{\parallel obs}$ — наблюдаемые компоненты расстояния r перпендикулярно и параллельно лучу зрения $s = \sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel obs}^2}$.

Вычисление ξ -функции в реальном пространстве. Метод расчета ξ -функции в реальном пространстве основан на получении проекции корреляционной функции $w(r_{\perp})$, которая не зависит от поля пекулярных скоростей, если распределение радиальных пекулярных скоростей симметрично вокруг каждой галактики выборки. Тогда, интегрируя вдоль луча зрения, мы получаем

$$w(r_{\perp}) = 2 \int_0^{\infty} \xi_z(r_{\perp}, r_{\parallel obs}) dr_{\parallel obs}, \quad (58)$$

в которой интервал интегрирования на практике ограничен выбранными пределами радиальной скорости. Тогда искомая функция ξ дается интегралом Абеля

$$\xi(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{w' dr_{\perp}}{(r^2 - r_{\perp}^2)^{1/2}}, \quad (59)$$

где $w' = dw(r_{\perp})/dr_{\perp}$. Уравнение (59) дает решение задачи восстановления корреляционной функции в реальном пространстве $\xi(r)$.

Для степенного закона $\xi = (r_0/r)^{\gamma}$ интеграл (58) дает

$$w(r_{\perp}) = Ar_{\perp}^{1-\gamma}, \quad (60)$$

где

$$A = r_0^{\gamma} \frac{\Gamma_e(1/2)\Gamma_e((\gamma-1)/2)}{\Gamma_e(\gamma/2)} \quad (61)$$

и $\Gamma_e(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Ограничения метода проекции. Из уравнения (60) ясно, что такое решение для корреляционной ξ -функции реального пространства справедливо, только если показатель степени $\gamma \geq 1$. Например, $\gamma = 1$ дает $w(r_{\perp}) = \text{constant}$, и это говорит о том, что однородное фоновое распределение галактик можно спутать с проекцией неоднородного распределения реального пространства.

Согласно теореме о проекции фракталов (раздел 2.4.5), подобный метод неизбежно ведет к потере информации о структурах с фрактальной размерностью $D \geq 2$. Следовательно, чтобы учесть поле пекулярных скоростей в рамках фрактальных структур с $D \geq 2$ (как раз такие структуры действительно наблюдаются, см. раздел 5), нужно для восстановления корреляционной функции использовать другой метод, свободный от указанного ограничения. Кроме того, требуется более тщательно изучить влияние ошибок в оценках компонент расстояний r_{\parallel} и r_{\perp} .

Оценка дисперсии относительных скоростей. В том случае, если поле плотности и поле скоростей связаны слабо, наблюдаемую корреляционную функцию $\xi_z(s)$ можно моделировать как свертку корреляционной функции реального пространства $\xi(r)$ с распределением скоростей пар галактик $f(v)$. Согласно работам Peebles (1980, раздел 76) и Davis & Peebles (1983), эту свертку можно представить в виде:

$$1 + \xi_z(r_{\perp}, r_{\parallel obs}) = H_0 \int [1 + \xi(\sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2})] f(v) dr_{\parallel}, \quad (62)$$

где

$$v = H_0 r_{\parallel obs} - H_0 r_{\parallel} + \bar{v}_{12}(r), \quad (63)$$

а $\bar{v}_{12}(r)$ — средняя радиальная скорость пары галактик на расстоянии r друг от друга, которая задается выбранной моделью. Davis & Peebles (1983) приняли следующую модель

$$\bar{v}_{12}(r) = \frac{H_0 r_{\parallel}}{1 + (r/r_0)^2} \quad (64)$$

и экспоненциальный вид для $f(v)$:

$$f(v) = B \exp\left(-2^{1/2} |v| / \sigma_{12}\right). \quad (65)$$

В результате такого подхода можно получить оценку характерной *дисперсии скоростей пар* σ_{12} .

3.3. Метод условной плотности Г

3.3.1. Определения

В современной статистической физике для анализа фрактальных структур успешно применяется метод условной плотности. Pietronero (1987) предложил использовать его для внегалактической астрономии, и многие авторы применили его

к трехмерным каталогам галактик (см. обзоры Coleman & Pietronero, 1992; Sylos Labini et al., 1998; GSLJP). Преимуществом метода условной плотности является то, что он дает неискаженную оценку истинной степенной корреляции и истинную фрактальную размерность. Его можно также использовать для нахождения неискаженного значения масштаба однородности выборки галактик.

Непрерывные стохастические процессы. Условную плотность $\Gamma(r)$ можно определить через полную корреляционную функцию (уравнение (32)) в следующем виде:

$$\Gamma(r) = \frac{R_{\mu\mu}(r)}{\mu_0} = \frac{\langle \rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_1 + \vec{r}) \rangle}{\rho_0}. \quad (66)$$

Здесь $\rho(r)$ — стохастическое поле плотности, а ρ_0 — плотность (средняя по ансамблю). Γ -функция имеет физическую размерность плотности [г/см³] и является мерой корреляции в поле полной плотности без вычета средней плотности. Физическая размерность Γ -функции согласуется с общей интерпретацией $\Gamma(r)$ как закона средней плотности вокруг каждой точки структуры. Это делает данную оценку естественным детектором фрактальности.

Как мы увидим далее, это определение позволяет построить такую оценку, у которой нет дополнительных ограничений, наподобие нормировки в уравнении (48), и которая, следовательно, может дать неискаженное значение показателя степени корреляций со степенными законами.

Дискретные стохастические фрактальные процессы. Рассмотрим дискретный стохастический процесс, одной из реализаций которого является множество одинаковых частиц в случайно выбранных точках \vec{x}_a , $a=1, \dots, N$ так, что концентрация $n(\vec{x})$ задается выражением

$$n(\vec{x}) = \sum_{a=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_a). \quad (67)$$

Если стохастический процесс порождает фрактал, то естественно определить концентрацию как функцию двух переменных: $n = n(\vec{x}, r)$. Первая переменная описывает положение \vec{x}_a точки структуры, а вторая переменная задает радиус r сферы, внутри которой подсчитывается число частиц этой структуры. Переменная r служит для построения статистики, которая может измерять “силу сингулярности” вокруг частиц фрактальной структуры, в которой число частиц растет по степенному закону $N(r) \propto r^D$.

Обозначим через $N_V(\vec{x}_a, r)$ число частиц в сфере радиуса r с центром в частице a с координатами

\vec{x}_a , принадлежащих этой структуре:

$$N_V(\vec{x}_a, r) = \int_0^r n(\vec{x}_a + \vec{x}) 4\pi x^2 dx, \quad (68)$$

а $N_S(\vec{x}_a, r)$ — число частиц в сферическом слое $r, r + \Delta r$ с центром в точке \vec{x}_a :

$$N_S(\vec{x}_a, r) = \int_r^{r+\Delta r} n(\vec{x}_a + \vec{x}) 4\pi x^2 dx. \quad (69)$$

Эти величины меняются от одной реализации к другой, но после усреднения по многим реализациям возникает стабильная степенная зависимость от масштаба r . В случае эргодических процессов усреднение по многим реализациям можно заменить на усреднение по множеству точек в одной реализации.

Следуя работе Pietronero (1987), мы определим *условную плотность (концентрацию) в оболочках* для стохастического фрактального процесса в виде:

$$\Gamma(r) = \left\langle \frac{N_S(\vec{x}_a, r)}{4\pi r^2 \Delta r} \right\rangle_{\vec{x}_a} = \frac{DB}{4\pi} r^{-(3-D)}, \quad (70)$$

а *условную плотность в объемах* как

$$\Gamma^*(r) = \left\langle \frac{N_V(\vec{x}_a, r)}{(4\pi/3)r^3} \right\rangle_{\vec{x}_a} = \frac{3B}{4\pi} r^{-(3-D)}, \quad (71)$$

где выражение в $\langle \rangle_{\vec{x}_a}$ означает усреднение по всем точкам \vec{x}_a в одной реализации при условии, что центры сфер совпадают с частицами этой реализации (что объясняет слово “условный”). Последние равенства в уравнениях (70) и (71) относятся к идеальным фрактальным структурам, для которых

$$\Gamma^*(r) = \frac{3}{D} \Gamma(r). \quad (72)$$

3.3.2. Оценка Γ -функции

Рассмотрим стохастический фрактальный процесс, в котором число частиц $N_V(\vec{x}_a, r)$ в сфере радиуса r с центром в точке \vec{x}_a и число частиц $N_S(\vec{x}_a, r)$ в слое $r, r + \Delta r$ задаются уравнениями (68) и (69). Учитывая определения условной плотности (уравнения (70) и (71)), можно использовать следующие две статистики для их оценки по одной реализации (конечной выборке галактик):

$$\hat{\Gamma}(r) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \frac{1}{4\pi r^2 \Delta r} \int_r^{r+\Delta r} n(\vec{x}_a + \vec{x}) 4\pi x^2 dx \quad (73)$$

для условной плотности Γ в слое, и

$$\hat{\Gamma}^*(r) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \frac{3}{4\pi r^3} \int_0^r n(\vec{x}_a + \vec{x}) 4\pi x^2 dx \quad (74)$$

для условной плотности Γ^* в объеме. Таким образом, использовать метод условной плотности в принципе довольно просто: это всего лишь подсчет числа частиц внутри сферического объема $V(r)$ или внутри сферического слоя $S(r)\Delta r$. Данная процедура выполняется для каждой точки структуры, а затем вычисляется среднее. Для оценки Γ -функции не нужно генерировать искусственные пуассоновские распределения, как это было необходимо для метода ξ -функции.

Фрактальная размерность и коразмерность.

Для фрактальной структуры Γ -функция (уравнение (70)) и ее оценка (уравнение (73)) имеют степенной вид:

$$\hat{\Gamma}(r) = \Gamma_0 r^{-\gamma}. \quad (75)$$

Это очень важное свойство оценки Γ позволяет получить неискаженное значение фрактальной размерности в выборке галактик.

Показатель степени, определяющий уменьшение условной плотности

$$\gamma = D - 3 \quad (76)$$

называется *коразмерностью*. Здесь D — фрактальная размерность (или корреляционная размерность D_2). При увеличении объема выборки V_s амплитуда Γ_0 оценки $\hat{\Gamma}(r)$ не меняется, возрастает только диапазон доступности масштабов r . Это означает, что $\Gamma(r)$ характеризует поведение плотности (концентрации) в выборке.

Масштаб однородности. Для фрактальной структуры, ограниченной сверху некоторым масштабом R_{hom} , после которого распределение становится однородным (т.е. имеющим фрактальную размерность $D=3$) оценка Γ -функции есть

$$\hat{\Gamma}(r) = \text{constant}, \quad \text{for } r > R_{hom}. \quad (77)$$

Таким образом, метод условной плотности — это мощный инструмент для поиска перехода от фрактальной кластеризации в область однородности.

3.3.3. $\Gamma_z(s)$ и v_{pec} для пространства красных смещений

Как обсуждалось в разделе 3.2.5, оценка пространственного распределения галактик по каталогам красных смещений основывается на координатах $(\alpha, \delta, z_{obs})$. Используя те же обозначения, что и в разделе 3.2.5 для $s, r_{\perp}, r_{\parallel}$, можно записать для условной плотности в пространстве красных смещений

$$\Gamma_z(s) = \Gamma_z(r_{\perp}, r_{\parallel|obs}). \quad (78)$$

Соотношение между условной плотностью в реальном пространстве $\Gamma(r)$ и в пространстве крас-

ных смещений $\Gamma_z(s)$ имеет вид

$$\Gamma_z(r_{\perp}, r_{\parallel|obs}) = \int g(\vec{r}, \vec{w}) \Gamma(r) d^3 w, \quad (79)$$

где $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ относительная пекулярная скорость пары галактик на расстоянии \vec{r} друг от друга, а $g(\vec{r}, \vec{w})$ — распределение относительных скоростей. Здесь компоненты относительного расстояния \vec{r} задаются следующими формулами $r_1 = r_{\perp}$, $r_3 = r_{\parallel|obs} - w_3/H_0$, и $r^2 = r_{\perp}^2 + (r_{\parallel|obs} - w_3/H_0)^2$.

Чтобы восстановить условную плотность в реальном пространстве по непосредственно наблюдаемой условной плотности в пространстве красных смещений, нужно выполнить компьютерное моделирование искусственных фрактальных структур с известными полями пекулярных скоростей, а затем сравнить модельное $\Gamma_{mod}(s)$ с наблюдаемым $\Gamma_z(s)$.

3.3.4. Γ -функция для сечений

Если в трехмерном пространстве фрактальную структуру пересекает плоскость, тогда ожидаемое значение фрактальной размерности сечения задается уравнением (30):

$$D_{int} = D - 1. \quad (80)$$

Чтобы определить Γ -функцию для выборки, которая представлена двумерным сечением, мы будем использовать двумерную систему координат $\vec{y} = (y_1, y_2)$, для которой можно вычислить функцию $\Gamma_{int}(y)$.

Такая ситуация возникает в обзорах галактик, имеющих вид тонкой полосы на небесной сфере, в случае исследования масштабов r , превосходящих толщину обзора. Например, для истинной фрактальной размерности $D=2$ фрактальная размерность сечения будет равна $D_{int}=1$. Следовательно, мы ожидаем получить степенное поведение соответствующей функции $\Gamma_{int}(y) \propto y^{-1}$. Ниже будет показано, что теорема о сечении фракталов помогает понять поведение спектра мощности в обзорах такого типа.

3.4. Сравнение ξ - и Γ -функции

3.4.1. Соотношение между Γ и ξ

Из определений условной плотности Γ (уравнение (66)) и корреляционной функции ξ (уравнение (41)) мы имеем соотношение:

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{n_0} - 1, \quad (81)$$

если существует средняя концентрация n_0 рассматриваемого стохастического процесса. Обе

функции (Γ и ξ) являются условными характеристиками стохастического процесса, т.е. они определены при условии, что центры сфер подсчета находятся в точках структуры. Однако между ними все еще существует глубокая разница. $\Gamma(r)$ представляет полную корреляционную функцию, тогда как $\xi(r)$ представляет редуцированную корреляционную функцию стохастического процесса. Этот факт делает свойства соответствующих оценок ξ и Γ сильно отличающимися, что объясняет различие в получаемых этими методами оценках показателя степени корреляции и масштаба однородности.

Из уравнения (81) следует соотношение между оценками для конечной выборки галактик:

$$\hat{\xi}_{FS}(r) = \frac{\hat{\Gamma}_{FS}(r)}{\bar{n}} - 1. \quad (82)$$

Здесь $\hat{\xi}_{FS}$ называется оценкой “в полных оболочках”, поскольку она определяется через оценку Γ , которая вычисляется с помощью сферических оболочек, полностью погруженных в объем выборки.

Оценка $\hat{\Gamma}$ (уравнение (73)) — это всегда положительная функция, имеющая степенной вид для фрактальных структур. Оценка же $\hat{\xi}$ (уравнение (44)), напротив, неизбежно меняет знак и, следовательно, не может быть представлена в степенном виде даже для масштабно-инвариантных структур. Все оценки ξ -функции, основанные на подсчете пар относительно искусственного пуассоновского распределения, имеют общий недостаток. Они дают весьма искаженную величину для истинного показателя степени полной корреляционной функции как в случае степенных коррелированных процессов, так и для фрактальных распределений. Напротив, оценки Γ -функции по построению таковы, что дают неискаженные значения показателя степени корреляции и фрактальной размерности.

Оценка Γ -функции связана с *внутренними свойствами* выборки, тогда как оценка ξ -функции зависит как от внутренних, так и от внешних свойств выборки. В действительности $\hat{\Gamma}$ измеряет поведение полной плотности внутри сфер в пределах выборки, тогда как $\hat{\xi}$ измеряет флуктуации плотности относительно средней плотности, которая принимается для всего пространства за пределами конечной выборки. Это можно продемонстрировать также следующими рассуждениями. Рассмотрим подсчеты вокруг фиксированной точки. Ожидаемое число точек в оболочке с радиусом r и объемом dV равно $n(r)dV$, где $n(r)$ — это условная плотность $\Gamma(r)$, описывающая соотношение плотность-радиус. С другой стороны, то же самое ожидаемое число можно вычислить по корреляционной функции $\xi(r)$ как $n_0(1 + \xi(r))dV$.

Таким образом,

$$\Gamma(r) = (1 + \xi(r))n_0. \quad (83)$$

Важно отметить, что правая часть уравнения (83) становится определенной только после того, как вычислена средняя плотность n_0 для всей выборки, тогда как $\Gamma(r)$ локально существует всегда. Напомним, что $\xi(r)$ была определена для флуктуаций вокруг среднего n_0 .

Фрактальное поле плотности. Для случая масштабно-инвариантного стохастического фрактального поля плотности полная корреляционная функция $\Gamma(r)$ имеет степенной вид

$$\Gamma(r) = \frac{BD}{4\pi} r^{-\gamma}, \quad (84)$$

тогда как для той же фрактальной структуры редуцированная корреляционная функция $\xi(r)$ будет равна

$$\xi(r) = \frac{BD}{4\pi n_0} r^{-\gamma} - 1, \quad (85)$$

что не является степенной зависимостью. Эта разница между полной и приведенной корреляционными функциями была впервые отмечена в работе Pietronero & Kuper (1986).

Таким образом, ξ -функцию можно аппроксимировать степенным законом только для таких r , при которых $\xi(r) \gg 1$, что соответствует малым масштабам $r \ll r_0$. Однако на малых масштабах существенную роль играет шум дискретности, что также ведет к искажению истинного степенного закона. Следовательно, оценка ξ -функции дает искаженные величины показателя степени не только на крупных масштабах (нормировка), но и на малых (дискретность).

Почувствительно вычислить показатель степени γ_ξ корреляционной функции (уравнение (85)) на масштабах, близких к единичному масштабу r_0 . Взяв логарифмическую производную от уравнения (85), получаем (Joice et al., 1999):

$$\gamma_\xi(r) = -\frac{d[\log \xi(r)]}{d \log r} = \frac{2\gamma(r/r_0)^{-\gamma}}{2(r/r_0)^{-\gamma} - 1}. \quad (86)$$

Поэтому на единичном масштабе $r = r_0$ мы получаем замечательный результат:

$$\gamma_\xi(r_0) = 2\gamma. \quad (87)$$

Например, для истинного степенного закона плотности с $\gamma=1$ мы бы сделали вывод о видимом наклоне $\gamma_\xi=2$ для корреляционной ξ -функции при измерении на масштабах, близких к “длине корреляции” r_0 !

3.4.2. Зависимость r_0 от глубины выборки

Глубина выборки R_s является важным глобальным параметром наблюдаемого распределения галактик. Для фрактальной структуры, выбранной внутри сферического объема $V_s = \frac{4\pi}{3}R_s^3$ с $\bar{n} = N_s/V_s = 3BR_s^{D-3}/4\pi$, уравнение (85) дает

$$\hat{\xi}(r) = \frac{D}{3} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-\gamma} - 1, \quad (88)$$

и единичный масштаб r_0 начинает зависеть от параметров выборки.

Подставляя $r = r_0$ в уравнение (81) и учитывая, что $\xi(r = r_0) = 1$, получаем

$$r_0 = \left(\frac{DB}{8\pi\bar{n}} \right)^{1/\gamma}, \quad (89)$$

где \bar{n} — средняя концентрация объектов в выборке. Следовательно, получаем

$$\Gamma(r_0) = \frac{DB}{4\pi} r_0^{D-3} = 2\bar{n} = \frac{6B}{4\pi} R_s^{D-3}. \quad (90)$$

Из этого следует простое соотношение между единичным масштабом r_0 и глубиной выборки R_s :

$$r_0 = \left(\frac{3-\gamma}{6} \right)^{1/\gamma} R_s. \quad (91)$$

Снова отметим, что это справедливо для сферической выборки (т.е. $R_s = R_{max}^{sph}$) и фиксированной светимости (т.е. $L = const$) галактик выборки.

3.4.3. Геометрия и характерные масштабы обзора

Сильным ограничением для практического применения метода Γ -функции является требование, чтобы в объеме рассматриваемой выборки было достаточно места для целой сферы. Например, при этом для обзоров галактик с геометрией в виде тонкого среза невозможно измерять условную плотность на масштабах, превосходящих толщину слоя, т.е. диаметр максимальной сферы, полностью погруженной в объем обзора.

Приведенные выше соотношения между r_0 и различными параметрами выборки были выведены для идеального случая простого фрактала в достаточно большом сферическом объеме, внутри которого оценивается корреляционная функция. Для несферической геометрии обзора (тонкий слой или конус) эти соотношения будут применимы только для масштабов r , когда исследуемые галактики полностью попадают внутрь сферы радиуса r . Предполагается, что для несферической геометрии эти соотношения будут отличаться от указанных предсказаний.

Для рассматриваемой выборки галактик нужно всегда следить за следующими характерными масштабами расстояний:

$$R_{sep}, R_{max}^{sph}, R_s. \quad (92)$$

Среднее расстояние R_{sep} между галактиками в выборке можно грубо оценить как $\bar{n}^{-1/3}$ или вычислить по распределению ближайших соседей. Радиус максимальной сферы R_{max}^{sph} относится к сфере, полностью погруженной в выборку. Он играет ключевую роль в оценке корреляционных свойств галактик выборки. Глубина обзора R_s связана с наибольшим расстоянием между галактиками в выборке. Она существенно отличается от радиуса максимальной сферы в случае обзоров в виде тонкого среза.

В общем случае при корреляционном анализе выборок в виде тонкого среза нужно отдельно рассматривать две области масштабов. Во-первых:

$$R_{sep} < r < R_{max}^{sph}, \quad (93)$$

где можно использовать метод Γ -функции и оценивать значение истинной фрактальной размерности. Во-вторых:

$$R_{max}^{sph} < r < R_s, \quad (94)$$

где метод Γ -функции применять нельзя. Для этой области необходимо разрабатывать другие методы, такие как метод сечений фрактальных структур и метод двухточечной условной лучевой плотности.

3.5. Распределение ближайших соседей

Распределение расстояний до ближайшей соседней точки является полезным свойством фракталов, которое можно использовать, чтобы отличать фрактальные распределения от обычных. Подробно это рассматривается в книге GSLJP.

Пуассоновское распределение. Например, для пуассоновского процесса в трехмерном пространстве распределение $w(r)$ плотности вероятности нахождения ближайшего соседа на расстоянии r есть

$$\omega(r) = 4\pi n_0 r^2 \exp\left(-\frac{4\pi n_0 r^3}{3}\right). \quad (95)$$

Для пуассоновского процесса среднее расстояние между точками-частицами равно $R_{sep} \approx n_0^{-1/3}$.

Фрактальное распределение. Для общего случая фрактальной структуры не существует точной формулы типа (95). Однако в книге GSLJP была выведена полезная аппроксимация для распре-

деления плотности вероятности обнаружить ближайшего соседа во фрактальной структуре:

$$\omega(r) = 4\pi C r^{D-1} \exp\left(-\frac{4\pi C r^D}{D}\right), \quad (96)$$

где $C = DB/4\pi$.

На рис. 5 представлена функция $w(r)$ для двух случаев: однородного пуассоновского распределения ($D = 3$) и фрактального распределения ($D = 2$). Пунктирные кривые соответствуют теоретическим предсказаниям по формулам (95) и (96). Видно, что чем ниже значение фрактальной размерности D , тем ближе находятся соседи внутри фрактальной структуры. Этот пример показывает, что функцию вероятности нахождения ближайших соседей можно использовать как дополнительный метод оценки фрактальной размерности в выборке галактик.

3.6. Двухточечная условная лучевая плотность

3.6.1. Определения

Рассмотренные выше условные плотности стохастических фрактальных процессов были одноточечными, поскольку центр сферы, в которой подсчитываются частицы, находится в одной фиксированной точке a с координатами \vec{x}_a , а подсчеты производятся вокруг каждой точки a выборки. Однако в некоторых космологических исследованиях, например, связанных с гравитационным линзированием (Baryshev & Ezova, 1997), становится необходимым использовать двухточечные условные плотности посредством одновременной фиксации двух частиц a, b с координатами \vec{x}_a, \vec{x}_b и подсчета галактик внутри тонкого цилиндра между этими точками.

Чтобы определить распределение частиц вдоль такого цилиндра, ось которого связывает две точки структуры $\{a, b\} \subset \{x_i, i = 1, \dots, N\}$, Baryshev & Bukhmastova (2004) ввели понятие двухточечной условной лучевой плотности $\eta_{a,b}(r)$ для стохастического фрактального процесса. В приложении к галактикам, согласно космологическому принципу Мандельброта, частицы a и b статистически эквивалентны. Следовательно, для каждой из них одноточечная условная плотность задается выражением (70), которое пропорционально вероятности обнаружить частицы на расстоянии r от фиксированных точек структуры.

Возьмем теперь две независимые точки структуры на расстоянии $r_{ab} = |\vec{x}_a - \vec{x}_b|$ друг от друга. Обозначим через C событие, когда частицы появляются на расстоянии r_a от точки a и независимо на расстоянии r_b от точки b . Тогда C задается

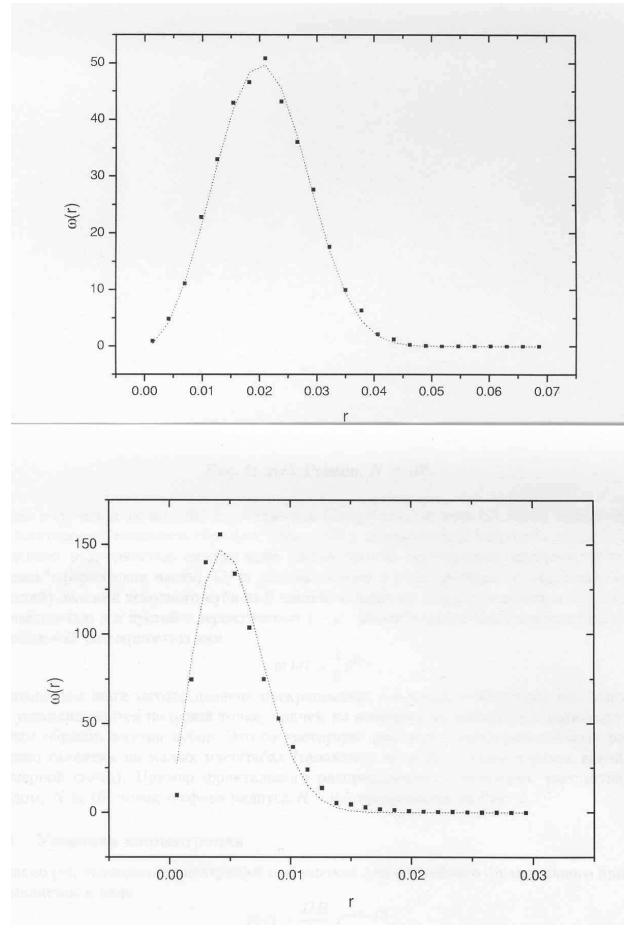


Рис. 5: Распределения вероятности обнаружить ближайшего соседа на расстоянии r для двух случаев: (вверху) однородное пуассоновское распределение ($D=3$) и (внизу) фрактальное распределение с ($D=2$) (случайное множество Кантора). Распределения находятся в трехмерном пространстве внутри сферы диаметра $=1$, полное число точек в каждом случае $N = 2.5 \cdot 10^3$. Пунктирные кривые соответствуют теоретическим предсказаниям согласно уравнениям (99) и (100) (из работы Vasiliev, 2004).

объединением $C = A \cup B$ двух событий, связанных с a и b . Таким образом, двухточечная условная лучевая плотность, пропорциональная вероятности обнаружить частицы вокруг частиц a и b , может быть представлена как сумма одноточечных условных плотностей. Первой аппроксимацией является предположение о независимых событиях. Численное моделирование показало, что эта аппроксимация достаточна для анализа обычных фрактальных структур (Baryshev & Bukhmastova, 2004). Тогда двухточечную условную лучевую

плотность можно выразить как

$$\eta_{ab}(r) = \frac{1}{2} [\Gamma_a(r) + \Gamma_b(r_{ab} - r)] = \frac{DB}{8\pi} \cdot r_{ab}^{-\gamma} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_{ab}} \right)^{-\gamma} + \left(1 - \frac{r}{r_{ab}} \right)^{-\gamma} \right], \quad (97)$$

где $\gamma=D-3$. Расстояние r измеряется вдоль отрезка прямой, соединяющей частицы a и b , и в то же время оно определяет радиус r сферы с центром в первой точке и радиус $r_{ab} - r$ для другой сферы с центром во второй точке. Константа B определяет нормировку. Отметим, что в этой формуле элементы объема берутся вдоль прямой, соединяющей две точки — в этом смысле координата r является не сферической радиальной координатой, а декартовой координатой, маркирующей элементы объема (“таблетки”) толщиной dr вдоль этого цилиндра.

3.6.2. Оценка

Чтобы оценить $\eta_{a,b}(r)$ можно использовать статистику

$$\hat{\eta}_{ab}(r) = \left\langle \frac{N_c(\vec{x}_a, \vec{x}_b, r, h, \Delta r)}{\pi h^2 \Delta r} \right\rangle_{\{a,b\}} = \frac{1}{N_{ab}} \sum_{\{a,b\}}^{N_{ab}} \frac{1}{\pi h^2 \Delta r} \int_r^{r+\Delta r} \int_0^h n(\vec{x}) 2\pi h dh dr, \quad (98)$$

где N_c — число частиц в элементе объема цилиндра диаметром h и высотой Δr , ось которого соединяет частицы структуры a и b . Элемент объема находится на расстоянии r от a , что соответствует расстоянию $r_{a,b} - r$ от точки b . Усреднение выполняется для каждой пары точек, относящихся к цилиндрам, имеющим длину в интервале $(l, l + \Delta l)$. Параметры h и Δr выбираются так, чтобы они составляли какую-то часть среднего расстояния между частицами в выборке. Практическое моделирование искусственных фракталов показывает, что оцениваемая фрактальная размерность устойчива при разумных изменениях размера таблетки (Baryshev & Bukhmastova, 2004; Vasiliev, 2004).

На практике может встретиться более общая ситуация, когда в выборке одновременно присутствует и фрактальная структура, и однородный фон. Тогда практическое вычисление фрактальной размерности D с помощью оценки $\eta_{a,b}(r)$ можно провести, подгоняя к наблюдениям безразмерное распределение вероятности с тремя свободными параметрами γ, R_1, R_2

$$\frac{N(y)}{N} = R_1 \cdot \frac{[y^{-\gamma} + (1-y)^{-\gamma}]}{2} + R_2, \quad (99)$$

где $N(y)$ — наблюдаемое число точек, обнаруженное в каждой таблетке, т.е. в пределах малых интервалов $(y, y + \Delta y)$ вдоль цилиндра длиной l . Переменная y — это относительное расстояние, измеренное вдоль линии, соединяющей две точки ($y = r/r_{ab} = r/l$). N — полное число точек внутри цилиндров длиной l . В случае подлинных самоподобных структур можно вычислить эти числа для всех цилиндров разной длины одновременно. На рис. 6 показана наблюдаемая двухточечная условная лучевая плотность для выборки галактик LEDA.

Параметр R_2 учитывает вклад возможного пуассоновского фона. Полезно ввести меру относительной силы β фрактальной компоненты, как это было сделано в работе Vasiliev (2004):

$$\beta = \frac{1 - R_2}{R_2}. \quad (100)$$

Когда $\beta=1$, вклад от фрактальной структуры равен вкладу пуассоновского фона ($R_2 = 0.5$).

Основное преимущество метода цилиндра состоит в том, что он может работать для обзоров в виде тонкого среза, позволяя исследовать масштабы, сравнимые с глубиной обзора.

3.7. Фурье-анализ структур

3.7.1. Обычное поле плотности

Если пространственное распределение объектов задается стохастическим полем плотности, то флуктуации этого поля можно представить интегралом Фурье как суперпозицию плоских пространственных волн с волновым числом $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\varrho(\vec{x}) - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\delta}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k. \quad (101)$$

Здесь Фурье-преобразование $\tilde{\delta}(\vec{k})$ флуктуаций плотности $\delta(\vec{x})$ является комплексной величиной и, значит, его можно представить в виде:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = |\tilde{\delta}(\vec{k})| \exp(i\phi(\vec{k})). \quad (102)$$

Мы видим, что для полного описания пространственного распределения объектов анализ должен содержать и спектр амплитуд $|\tilde{\delta}(\vec{k})|$, и спектр фаз $\phi(\vec{k})$.

В случае гауссовского случайного процесса фазы плоских волн распределены в интервале $[0, 2\pi]$ равномерно, и для описания поля плотности достаточно рассмотреть только спектр мощности

$$P(\vec{k}) = \langle |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \rangle. \quad (103)$$

Когда распределение изотропно, спектр мощности и корреляционная функция связаны соотношением

$$P(k) = 4\pi \int \xi(r) \frac{\sin(kr)}{kr} r^2 dr. \quad (104)$$

Таким образом, для степенной корреляционной функции $\xi(r) \propto r^{-\gamma}$ спектр мощности также имеет степенной вид $P(k) \propto k^{\gamma-3}$ для ограниченного диапазона масштабов $k_1 < k < k_2$. Для малых k (крупные масштабы $\lambda > R_s$) существует предел из-за размера обзора R_s , что дает $P(k) \rightarrow 0$ для $\lambda \rightarrow R_s$.

Фазовый спектр $\phi(\vec{k})$ несет важную информацию, дополнительно к $P(k)$. Возможная негауссовость свойств кластеризации, т.е. неоднородность фазового спектра, была рассмотрена в работах Chiang & Coles, 2000 и Coles & Chang, 2000.

Основная проблема анализа спектра мощности — та же самая, что для корреляционной функции: средняя плотность $\bar{\rho}$ должна быть хорошо определена в пределах объема выборки.

Однако, преимущество $P(k)$ -метода состоит в том, что показатель степени γ можно оценить без искажения по $P(k)$ для масштабов $\lambda < R_{max}^{sph}$.

3.7.2. Фрактальное поле плотности

Для стохастических фрактальных процессов можно выполнить Фурье-анализ поля фрактальной плотности (Sylos Labini & Amendola, 1996, Sylos Labini et al., 1998). В этих работах было введено понятие обобщенного спектра мощности $\Pi(k)$ фрактального процесса, который определяется через преобразование Фурье условной плотности $\Gamma(r)$:

$$\Pi(k) = 4\pi \int \Gamma(r) \frac{\sin(kr)}{kr} r^2 dr. \quad (105)$$

Поскольку условная плотность стохастического фрактального процесса имеет степенной вид $\Gamma \propto r^{3-D}$, то для обобщенного спектра мощности мы также получаем степенной вид $\Pi(k) \propto k^{-D}$. Здесь D — фрактальная размерность, которую, следовательно, можно прямо измерить по спектру мощности. Обобщенный спектр мощности — это удобный инструмент для описания высоко иррегулярных систем с фрактальными свойствами.

3.7.3. Роль геометрии выборки

В случае выборки в виде тонкого среза для масштабов, превосходящих максимальную сферу, полностью погруженную в выборку, геометрия рассматриваемой структуры фактически приближается к сечению трехмерной фрактальной структуры плоскостью. Следовательно, согласно теоре-

ме о сечении фракталов (раздел 2.4.5), ожидается, что для структуры с истинной фрактальной размерностью D измеренная на больших масштабах фрактальная размерность выборки будет равна $D_{int} = D-1$. Это означает, что существуют три характерных интервала масштабов поведения спектра мощности $P(k)$ или $\Pi(k)$: 1) для масштабов $\lambda < R_{max}^{sph}$ получаем $P(k) \propto k^{-D}$ с показателем степени, равным истинной фрактальной размерности; 2) для масштабов $R_{max}^{sph} < \lambda < R_s$ получаем $P(k) \propto k^{-(D-1)}$ с показателем степени, равным фрактальной размерности сечения; 3) для масштабов $\lambda > R_s$ получаем $P(k) \rightarrow 0$ из-за конечного размера выборки.

3.8. Мультифракталы и функция светимости

3.8.1. Спектр фрактальных размерностей

Существует несколько определений фрактальной размерности: хаусдорфова размерность D_H , размерность покрытия или емкости D_b , корреляционная размерность D_2 , размерность масса-длина D_m (краткое описание для астрономов см. в книгах GSLJP; Martinez & Saar, 2002). Для самоподобных распределений все эти размерности обычно равны (и $\leq d$ — размерности пространства вложения). В подобных простых случаях мы будем использовать символ D для этой общей фрактальной размерности. Для мультифрактального анализа, который оперирует со всем спектром фрактальных размерностей, все размерности нужно рассматривать отдельно.

Нам уже встречалась фрактальная размерность масса-длина D_m в модели мира Фурнье, которая была построена так, что $M(r) \propto r$ и, следовательно, $D_m=1$. Это была первая математическая модель регулярной фрактальной структуры, примененная ко всей Вселенной.

Размерность покрытия или емкость множества $S \subset \mathbb{R}^p$ определяется как

$$D_b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}, \quad (106)$$

где $N(\epsilon)$ — минимальное число P -размерных блоков величины ϵ , необходимое, чтобы полностью покрыть множество S .

В случае пространственного распределения галактик $p=3$ нужно извлечь из выборки куб (трехмерный блок), внутри которого выполнять вычисления размерности покрытия D_b . Наклон графика функции $\log N(\epsilon)$ относительно $\log(1/\epsilon)$ дает оценку размерности покрытия.

Корреляционная размерность D_2 определяется через показатель степени корреляции γ в пол-

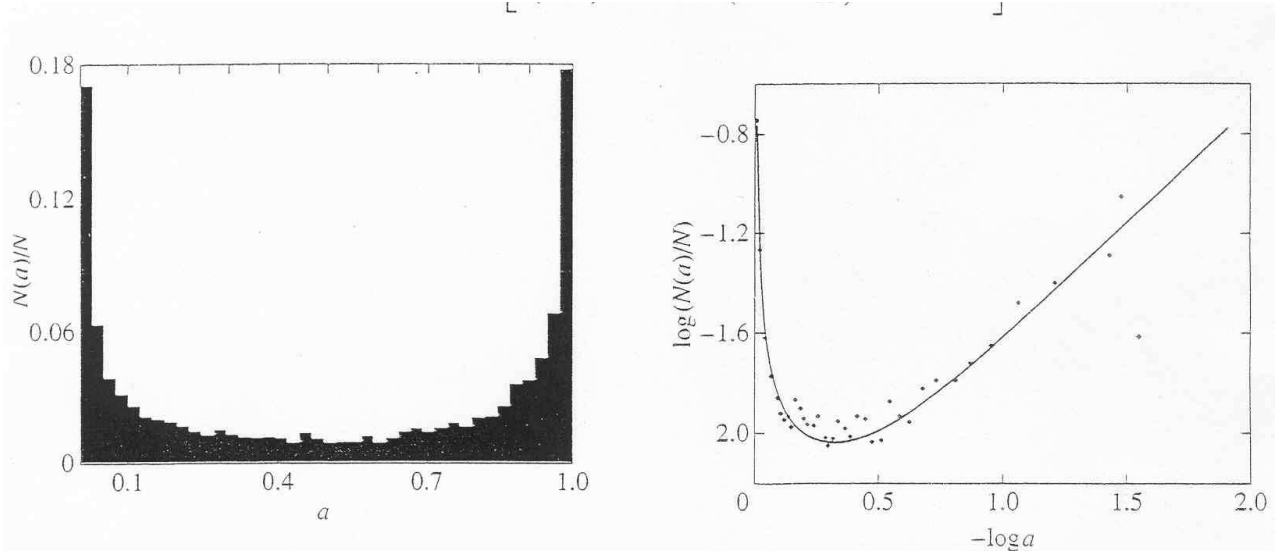


Рис. 6: Гистограмма $\hat{\eta}_{ab}(r)$ распределения галактик выборки LEDA вдоль цилиндров с $l < 100$ Мпк (слева). То же самое распределение в логарифмическом масштабе и теоретическая кривая $\eta_{ab}(r)$ с фрактальной размерностью $D=2.02$ (из работы *Baryshev & Bukhmastova, 2004*) (справа).

ной корреляционной функции или условной плотности Γ . Наше рассмотрение фрактальных структур в предыдущем разделе имело целью установление различия между однородностью и масштабной инвариантностью. Это различие сохраняется также и в случае мультифрактального распределения галактик. В этом случае рассмотренные нами корреляционные функции соответствовали бы одному из значений показателя степени мультифрактального спектра, но результат — разница между однородностью и масштабной инвариантностью (фрактальной или мультифрактальной) — тот же самый.

Подчеркнем также, что дискуссия по вопросу мультифрактальных свойств галактического распределения возникла в литературе из-за разницы между фрактальной размерностью, полученной двумя методами: подсчетом блоков и корреляционной функцией (Jones et al., 1988; Martinez & Jones, 1990; Martinez & Saar, 2002). Однако, как мы видели ранее, разница была вызвана использованием оценки ξ -функции, которая дает искаженное значение для корреляционной размерности D_2 . Если используется Γ -функция, тогда получается, что единое значение фрактальной размерности $D \approx 2$ хорошо соответствует наблюдаемым данным и, следовательно, это исключает подобного рода мультифрактальность.

3.8.2. Функция светимости Шехтера

Выше были рассмотрены фрактальные структуры, состоящие из одинаковых частиц единичной

массы. В работах Sylos Labini et al. (1998) и книге GSLJP применительно к галактикам используется термин “мультифрактальность” в случае, когда так называемый *фрактальный базис (положения частицы)* имеет единую размерность. В этом случае задан некоторый стохастический процесс, который помечает частицы фрактального базиса различными значениями некоторой случайной величины μ (например, светимости L или массы m).

Реальные галактики имеют различные массы и светимости, которые можно охарактеризовать функцией светимости $\phi(L)$. Обычно она представляется законом Шехтера:

$$\phi(L) dL = \phi^* \cdot (L/L^*)^\alpha \cdot \exp(-L/L^*) dL, \quad (107)$$

который дает долю галактик в единичном объеме в интервале светимости $(L, L + dL)$. Параметры α и L^* определяются из наблюдений, а Φ^* — коэффициент нормировки, получается из условия $\int_{\beta}^{\infty} \phi(L) dL = 1$, так что

$$\phi^* = \frac{\Gamma(\alpha + 1, \beta)}{L^*}. \quad (108)$$

Здесь $\Gamma(n, x)$ — неполная гамма-функция, а β — параметр, определяющий обрезание функции светимости со стороны слабых галактик.

3.8.3. Корреляция положение-светимость в мультифрактальной модели

Рассмотрим реализацию стохастического процесса, для которого можно определить плотность μ

светимости (или массы) в виде

$$\mu(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (109)$$

где μ_i — светимость (или масса) i -ой частицы.

В работах Pietronero (1987), Coleman & Pietronero (1992) и Sylos Labini & Pietronero (1996) рассматриваются функции плотности светимости или массы как мультифрактальные меры на множестве реализаций. Мультифракталы характеризуются спектром фрактальных размерностей $D(L)$, определяющим зависимость фрактальной размерности от светимости или массы. Это означает, что яркие и слабые галактики могут иметь различное пространственное распределение. Мультифрактальная модель предсказывает, что фрактальная размерность уменьшается с увеличением яркости объектов.

Пусть $N_{L,S}(\vec{x}_a, L, r)$ — число галактик со светимостью в интервале $(L, L + \Delta L)$ в сферическом слое $S(r) = 4\pi r^2 \Delta r$ с центром в точке \vec{x}_a , принадлежащей структуре. Чтобы обобщить понятие условной плотности на случай частиц разной светимости или массы, определим условную плотность светимости (массу) как

$$\nu(L, r) = \left\langle \frac{N_{L,S}(\vec{x}_a, L, r)}{4\pi r^2 \Delta r \Delta L} \right\rangle_{\vec{x}_a} = \quad (110)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi r^2 \Delta r \Delta L} \int_L^{L+\Delta L} \int_r^{r+\Delta r} \mu(\vec{x}) d^3x dL. \quad (111)$$

Как показано в работе Sylos Labini & Pietronero (1996), для широкого класса мультифрактальных стохастических процессов условная плотность светимости имеет общий вид

$$\nu(L, r) = \phi_r(L) \cdot \Gamma_L(r) = \quad (112)$$

$$= \phi^* \cdot \left(\frac{L}{L^*(r)} \right)^{-\alpha} \cdot \exp(L/L^*(r)) \cdot \frac{D(L)B}{4\pi} \cdot r^{D(L)-3}. \quad (113)$$

Это означает, что закон Шехтера для функции светимости является наблюдаемым следствием мультифрактальности, а не просто удобной аналитической формой!

Особым свойством выражения (113) является зависимость параметра изгиба функции светимости $L^*(r)$ от радиуса рассматриваемого объема, а также зависимость фрактальной размерности от светимости $D(L)$. Эти свойства можно использовать для проверки мультифрактальности. Однако для этого потребуются большие выборки галактик, поскольку фрактальный анализ нужно выполнять отдельно для каждого интервала светимости. Если распределение является мультифрактальным, тогда самая большая светимость L_{max}

в выборке связана с ее сферической глубиной R_s соотношением (Coleman & Pietronero, 1992)

$$L_{max} \propto R_s^\beta, \quad (114)$$

где показатель степени β зависит от мультифрактального спектра.

4. Эпоха каталогов угловых положений галактик

История основных событий, освещающих спор о фрактальности в XX веке, представлена в табл.2 “Спор о крупномасштабной фрактальности”. Эта тема всегда была в центре космологического мышления, даже жарких споров, поскольку она напрямую связана с космологическими принципами. Конечно, неоднородности вблизи от нас очевидны, поэтому граница предполагаемой однородности должна находиться где-то на больших расстояниях. В ходе истории астрономии граница однородности постепенно сдвигалась все дальше от нас, начиная с хрустальной сферы неподвижных звезд до ньютоновских равномерно рассеянных звезд, а затем до хаббловского однородного распределения галактик. В настоящее время наблюдаемые сверхскопления галактик отодвинули границу однородности до масштабов, по крайней мере, 100 Мпк.

Вместе с границей однородности перемещался и центр вселенной с Земли на Солнце и затем в центр Млечного Пути. Одним из самых известных событий в астрономии XX века был Великий Спор между Харлоу Шепли и Гербером Д.Куртисом в 1920 году о масштабе и структуре Вселенной (Smith, 1983). Фактически этот спор возвестил превращение Млечного Пути в обычную галактику, в результате чего центр Вселенной окончательно исчез в мире галактик.

Между тем, возник новый спор о природе кластеризации галактик и границе крупномасштабной неоднородности. Эта борьба продолжалась в течение всего XX века. В ней принимали участие такие выдающиеся личности, как Шарлье, Эйнштейн, Селети, Хаббл, Лундмарк, де Вокулер, Сендидж, Пиблс и другие. Как всегда в астрономии и, в частности, в этой новой внегалактической области, нехватка наблюдений, имеющихся в любой исторический момент, приводит к неуверенной интерпретации данных. Современная фаза этого спора о фрактальности касается методики обработки наблюдательных данных (обзоров галактик) и сосредоточена вокруг того, как обнаружить пространственный масштаб, на котором однородность становится реальностью.

Новые аспекты и инструменты для решения проблемы неоднородности появились на сцене, когда в работах Benoit Mandelbrot (1975, 1977, 1982,

Таблица 2: История дебатов о крупномасштабной фрактальности

Годы	Авторы	Предмет
1900-е – 1920-е Парадоксы	Fournier d'Albe Charlier, Selety, Lundmark Einstein, Selety	Регулярные иерархические модели Критерии бесконечного мира Мах, стабильность, средняя точка
1930-е – 1970-е скопления и однородность	Shapley, Zwicky, Abell Carpenter, Kiang, Karachentsev Neyman, Scott de Vaucouleurs ----- Hubble Ambartsumian, Holmberg, Fesenko Sandage, Tammann, Hardy Webster, Longair	Сильная галактическая кластеризация Сверхкластеризация до 100 Мпк Двухуровневая иерархическая модель Космический закон плотность–радиус $\rho(r) \propto r^{-\gamma}$ при $\gamma = 1.7$ ----- Однородность из подсчетов галактик $\log N(m) = 0.6m + \text{constant}$ Переменная экстинция в Млечном Пути Линейный закон Хаббла на < 30 Мпк Изотропия радиоисточников
1970-е – 1980-е ξ и Г- функции	Wertz, Bonnor, Wesson, Alfvén Haggerty, Severne, Prigogine Totsuji, Kihara, Peebles Mandelbrot Baryshev, Perdang Lerner, Schulman, Seiden ----- Davis, Peebles Einasto, Klypin, Kopylov, Bahcall Pietronero Pietronero, Sanders, Coleman Pietronero, Ruffini, Calzetti et al. Jones, Martinez, Saar, Einasto	Физика иерархий Динамика N-тел в иерархиях $w \propto \theta^{-0.8} \Rightarrow \xi \propto r^{-1.8}$ Фракталы, мультифракталы Первые свидетельства $D = 2$: $M(r), z(r)$, стабильность, перколяция ----- $\gamma = 1.8, r_0 = 5$ Мпк, 2000 галактик r_0 зависит от глубины и типа Метод Г-функции Первый фрактальный анализ CfA Объяснение $r_0(R_s)$ $D_2 = 1.2, D_0 = 2$, мультифрактал?
1990-е – 2000-е Фракталы на трехмерных картах	Sylos Labini, Montuori, Pietronero Wu, Lahav, Rees Teerikorpi, Hanski, Theureau et al. Paturel, Teerikorpi, Courtois Baryshev, Bukhmastova Zehavi et al. (SDSS team) Hawkins et al. (2dFGRS team) ----- Gott et al. (SDSS team)	$D \approx 2$ по всем трехмерным каталогам Фрактальность $r < 30$ Мпк $TF < 200$ Мпк $\Rightarrow D = 2.2$, KLUN Подсчеты LEDA $< 15^m$: $0.44m, D = 2.2$ двухточечная плотность: $D = 2.1$ $\xi(s) \propto s^{-1.2}$, 29 300 галактик $\xi(s) \propto s^{-0.75}$, 200 000 галактик $D = 2.25$ искажения пекулярными скоростями? Великая Стена Слоана, 500 Мпк

1988) было введено понятие фрактала. Фракталы — самоподобные структуры с дальнедействующими корреляциями — были обнаружены в физике, а затем перенесены на астрономические масштабы — от солнечной системы и межзвездных облаков до скоплений галактик. Фракталы на самых крупных масштабах стало возможно наблюдать благодаря новой астрономической технике измерения красных смещений для тысяч галактик в совокупности с мощными теоретическими методами анализа данных. Открытыми вопросами первостепенной важности являются: 1) где находится граница перехода от фрактальности к однородности? и

2) какова величина фрактальной размерности распределения галактик?

4.1. Зарождение спора

4.1.1. Переписка между Эйнштейном и Селети

В своей первой статье по космологии (Einstein, 1917) Эйнштейн привел аргументы в пользу однородности. Он отмечает, что любая конечная звездная система испарится в бесконечность из-за внутренних гравитационных взаимодействий. Он также подчеркнул, что наблюдаемые астрономами скорости звезд малы, что говорит против боль-

шой разности потенциалов и указывает на однородное крупномасштабное распределение массы. Для Эйнштейна сильным теоретическим аргументом было то, что уравнение Пуассона, измененное с помощью космологической постоянной λ к виду

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi G\rho, \quad (115)$$

имеет решение для плотности $\rho = \text{constant}$:

$$\phi = -\frac{4\pi G}{\lambda}\rho, \quad (116)$$

так что статическое однородное распределение вещества является возможным, что объясняет также малые скорости звезд. Предполагалось, что масштаб однородности равен примерно среднему расстоянию между звездами.

Затем в той же статье Эйнштейн распространил этот результат на общую теорию относительности, получив сферическую модель мира с конечным радиусом кривизны. В конце статьи он упоминает, что не размышлял о том, согласуется ли его однородная модель с существующими астрономическими наблюдениями. Позднее эту ключевую гипотезу об однородности называли космологическим принципом Эйнштейна.

Австрийский ученый Франц Селети знал и об однородной модели Эйнштейна, и об иерархической модели Шарлье. В статье 1922 года в журнале *Annalen der Physik* Селети утверждал, что можно построить такие иерархические миры, которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

- бесконечное пространство;
- бесконечная полная масса;
- масса заполняет пространство так, что локально плотность везде конечна;
- нулевая средняя плотность массы в мире в целом;
- не существует единой центральной точки или центральной области мира.

В действительности Селети одним из первых осознал, что космологический принцип “отсутствия центра” может быть справедлив и для иерархических систем. Он выразил суть иерархических моделей, в которых наблюдатель видит вселенную в “молекулярно-иерархической” системе везде в основном одинаково. Селети также поднял вопрос о принципе Маха в таких вселенных и утверждал, что этот принцип может выполняться. Он указал, что в подобных моделях средняя нулевая плотность для вселенной в целом существует одновременно с ее бесконечной полной массой.

Эйнштейн (1922) быстро ответил Селети. Он считал, что принцип Маха не выполняется во вселенной с нулевой плотностью. Селети (1923) не согласился с ним и еще раз обсудил ключевые моменты его модели. Подводя итог дискуссии Эйнштейн

на и Селети, можно выделить следующие основные возражения против иерархических моделей, существовавших в 1920-е годы:

- для иерархической модели мира с нулевой общей плотностью не выполняется принцип Маха;
- большая разница потенциалов в сильно неоднородной вселенной ведет к слишком большой дисперсии скоростей звезд, что не наблюдается;
- иерархическая звездная система испарится, и звезды заполнят пустоты, что приведет к однородному распределению;
- в иерархическом мире существует выделенная центральная точка.

4.1.2. Ретроспективный взгляд на поставленные вопросы

В ретроспективе можно сказать, что, как ни странно, все эти аргументы все еще актуальны в современной космологии.

Во-первых, принцип Маха связывает инертную массу тела с крупномасштабным распределением массы во Вселенной. Можно определить ускорение пробной частицы только относительно этих далеких масс. В действительности природа инертной массы — все еще нерешенная проблема для современной теоретической физики, включая общую теорию относительности, в которой масса покоя частицы считается релятивистским инвариантом, независимо от космологически распределенной массы вокруг этой частицы. Таким образом, принцип Маха нельзя считать причиной для отказа от иерархических моделей.

Во-вторых, малая дисперсия скоростей звезд вызвана их движением в нашей Галактике и не связана со Вселенной в целом. В иерархических моделях с $D=1$ существует постоянная дисперсия скоростей для каждого иерархического уровня ($v^2 \propto M/r \propto \text{constant}$). Фактически проблема дисперсии скоростей переместилась от звезд на галактики. В последние годы особый интерес вызывал вопрос, почему дисперсия скоростей вокруг локального потока Хаббла так мала, несмотря на весьма неоднородное распределение галактик (Sandage, Tammann & Hardy, 1972; Chernin, 2001; Baryshev et al., 2001). Одно из возможных объяснений состоит в том, что за гладкий хаббловский поток отвечает космологическая постоянная, которую Эйнштейн ввел в своей статье 1917-го года, или ее современное обобщение — темная энергия.

В-третьих, вопрос о стабильности иерархических (фрактальных) структур гравитирующих частиц — один из открытых предметов обсуждения в современной гравитермодинамике. В статьях Perdang (1990) и Vega, Sánchez & Combes (1996) сде-

лан вывод, что статистическое равновесие может быть возможным для фрактальных структур с $D \approx 2$.

В-четвертых, вопрос о центральной точке любопытным образом связан с космологическим принципом. В стохастической фрактальной структуре нет привилегированного центра. Фракталы сохраняют важные свойства старых иерархических систем и являются более реалистичными моделями действительного распределения галактик (Mandelbrot, 1989; Pietronero et al., 1997).

Аргументы Эйнштейна продолжают стимулировать физиков и астрономов. Однако теперь они не являются причиной для отбрасывания неоднородных моделей мира, а определяют важные направления в исследованиях фрактальных крупномасштабных структур (см. табл. 3).

4.2. Первые аргументы в пользу кластеризации галактик

Между тем Шарлье (Charlier, 1922) подготовил карту неба на основе распределения 11475 туманностей, взятых из Нового Общего Каталога Дрейера (Dreyer's New General Catalogue) и из своих двух индексных каталогов (Index catalogue). Это привело его к следующему выводу: *Замечательным свойством изображения является то, что туманности как будто скапливаются в облака.* В споре о природе туманностей Шарлье полагал: *целесообразно считать спиральные туманности другими галактиками, похожими на нашу собственную.* Таким образом, он связал наблюдаемую кластеризацию с глобальным распределением вещества во Вселенной, т.е. он усмотрел в этом свидетельстве в пользу иерархических моделей мира.

Преемник Шарлье в должности профессора Лундского университета Кнут Лундмарк в докторской диссертации, написанной в 1919 году, так выразил свою убежденность: *Мы, конечно же, можем ожидать, что обнаружим очень сложную структуру в несомненно гигантской вселенской системе, образованной спиральными туманностями.* Позже одним из главных его занятий было составление Лундского Общего Каталога (Lund General Catalogue) галактик для изучения реального их распределения. Однако эта работа по тысячам галактик, с описаниями на отдельных карточках, так и не была закончена.

4.2.1. Наблюдения выявляют скопления галактик

Вскоре после открытия внегалактической Вселенной стало ясно, что кроме галактик поля существуют пары, группы и скопления галактик (см.

обзор истории Peebles, 1980; Biviano, 2000). Например, в 1930-е годы скопления галактик уже регулярно использовались для продолжения закона Хаббла на более далекие расстояния (Humason, 1931).

Свидетельством в пользу крупномасштабной кластеризации были следующие наблюдательные факты:

- *метagalактические облака Шепли;*
- *локальное Сверхскопление де Вокулера и соотношение плотность-радиус;*
- *богатые скопления Эйбела и их сверхскопления;*
- *облака галактик Шейна-Виртанена в Ликских подсчетах.*

Шепли положил начало широким фотографическим обзорам галактик (Shapley & Shapley, 1919; Shapley & Ames, 1932; Shapley, 1943; 1957). Каталог 1249 ярких галактик Шепли-Эймс с 1932 года был основой Опорного Каталога де Вокулера (de Vaucouleurs's Reference Catalogue) в 1960-е годы. Исследуя распределение скоплений галактик, Шепли пришел к выводу, что существуют "метagalактические облака" (сегодняшние сверхскопления), например в созвездиях Скорпиона, Центавра и Геркулеса. Облако в Центавре теперь называется сверхскоплением Шепли. Интересно упомянуть, что Клайд Томбо, первооткрыватель планеты Плутон, в качестве побочного результата своих интенсивных поисков планет отметил сверхскопление Персей-Рыбы. Он насчитал 1800 галактик в этом вытянутом облаке, которое в настоящее время — хорошо изученный агломерат скоплений галактик на расстоянии примерно 100 Мпк.

В книге *Внутренняя метagalактика* (Shapley, 1957) — этом интересном и ярком описании эпохи двумерных карт — Харлоу Шепли подвел итог работы по кластеризации галактик, выполненной в гарвардской обсерватории. В разделе "Введение в глубокие обзоры" (стр. 77) он пишет: *"Распределение галактик по небу легко проверить на любом однородном наборе фотографий с длинной выдержкой. Однако эффективное изучение распределения по лучу зрения требует намного больше труда. Оно осложняется трудностями фотометрии туманностей, а также неточностями, вносимыми значительным разбросом собственных светимостей галактик. Системы, находящиеся в пространстве рядом, могут отличаться на пять или более величин по видимой яркости, как, например, туманность Андромеды и ее спутники, а пара с одинаковой видимой яркостью может отличаться по расстоянию раз в десять... При изучении радиального распределения населения для оценки расстояний (относительных или абсолютных) нужно использовать*

Таблица 3: Основные темы исследований, связанные с крупномасштабной фрактальностью

Тема	Ссылки
Условная плотность Новые методы анализа данных Двухточечная условная лучевая плотность	Pietronero, 1987; Coleman, Pietronero, 1992; Gabrielli et al., 2004b Bharadwaj et al., 1999; Best, 2000; Martinez, Saar, 2002; Baryshev, Bukhmastova, 2004; Vasiliev, 2004
Фрактальная размерность галактического распределения Масштабы фрактальности Соотношение масса-радиус для всех масштабов	Coleman et al., 1988; Klypin et al., 1989; Lemson, Sanders, 1991; Jones et al., 1988; Martinez, Jones, 1990; Jones et al., 1992; Sylos Labini, Montuori, Pietronero, 1998 Sidharth, 2000; Teerikorpi, 2001; Rost, 2004
Локальное радиальное распределение галактик Численные подсчеты, нормировка Функции светимости, мультифракталы	Sandage, 1995; Teerikorpi et al., 1998; Teerikorpi, 2004 Baryshev, 1981; Joyce, Sylos Labini, 2001; Courtois et al., 2004 Sylos Labini, Pietronero, 1996
Зависимость корреляционной функции от глубины, светимости, типа объекта Пекулярные скорости	Einasto et al., 1986; Calzetti et al., 1987; Davis et al., 1988 Norberg et al., 2001, 2002 Klypin, Kopylov, 1983; Bahcall, 1988; Bahcall et al., 2003 Zehavi et al., 2002, 2004; Hawkins et al., 2003
Локальная фрактальная размерность Линейность и охлаждение локального потока Хаббла	Tikhonov, Makarov, Kopylov, 2000; Tikhonov, Makarov, 2003 Sandage et al., 1972; Sandage, 1986, 1987; Karachentsev et al., 1996 Ekholm et al., 2001; Karachentsev et al., 2003a,b; Whiting, 2003
Протофрактальные (иерархические) модели Релятивистские фрактальные модели Космологические тесты, фрактальная вселенная	Wertz, 1971; Wesson, 1978; Soneira, Peebles, 1977, 1978 Bonnor, 1972; Ruffini et al., 1988; Ribeiro, 1993; Gromov et al., 2001 Fang et al., 1991; Baryshev et al., 1994 Joyce et al., 2000; Sidharth, 2000
Космологическое гравитационное красное смещение	de Sitter, 1917; Bondi, 1947; Baryshev, 1981, 1994
Локальные тесты космологического вакуума и темная энергия внутри фракталов	Chernin, 2001; Baryshev et al., 2001; Axenides et al., 2002 Chernin et al., 2004; Maccio et al., 2004
Статистическая механика самогравитирующего фрактального газа, $D = 2$	Perdang, 1990; de Vega, Sanchez, Combes 1996, 1998, Combes, 1998; Huber & Pfenniger, 2001;
Моделирование N-тел Локальная структура Начальные условия и дискретность Стабильность, скорость, сила	Governato et al., 1997; Moore et al., 2001 Klypin et al., 2003; Maccio et al., 2004 Bottaccio et al., 2002; Baertschiger et al., 2002; 2004 Gabrielli, Sylos Labini, Joyce, Pietronero, 2004
Происхождение и эволюция крупномасштабных фракталов	Haggerty, 1971; Peebles, 1974a; Alfvén, 1983; Lerner, 1986 Ostriker et al., 1981; Pietronero et al., 1986; Schulman et al., 1986 Szalay, Schramm, 1985; Maddox, 1987; Luo, Schramm, 1992
Космологический принцип и фрактальность, изотропия и однородность	Mandelbrot, 1975, 1977; Pietronero, Sylos Labini, 1995; Rudnicki, 1995; Wu, Lahav, Rees, 1999; Baryshev, Teerikorpi, 2002 Mandelbrot, 1989; Sylos Labini, 1994

фотометрические методы.

Используя большие каталоги красных смещений, современный читатель поражается тому факту, что нигде красное смещение не упоминается как возможный индикатор расстояний. Но в то время обзоры красных смещений в локальной вселенной еще не проводились. Драгоценное время телескопа тратилось на длительные экспозиции, необходимые для измерения красных смещений в более глубоком пространстве. Однако после того,

как в 1964 и в 1976 гг. де Вокулер и его сотрудники опубликовали первый и второй Опорные Каталоги, вобравшие сотни и тысячи красных смещений, многие начали экспериментировать с красным смещением, чтобы посмотреть распределение галактик в радиальном направлении.

В работах de Vaucouleurs (1953, 1958) на основе каталога Шепли-Эймс представлено свидетельство в пользу локального сверхскопления галактик с центром в скоплении Дева и с полным диаметром

30 Мпк. Позже эта система исследовалась в работах Tully (1982) и Paturel et al. (1988). По существу, эта неоднородность в распределении галактик вызывает хорошо известную асимметрию численных подсчетов в двух полушариях. Следует отметить, что существовала также точка зрения, что такое увеличение численной плотности галактик — случайная флуктуация (Bahcall & Joss, 1976).

Сильно увеличилось число известных скоплений галактик с появлением каталога Джорджа Эйбла (1958), в котором 2712 богатых скоплений галактик. Согласно критерию отбора Эйбла, класс богатства основывается на подсчете числа галактик N , которые не более чем на 2 зв. величины слабее, чем третья по яркости галактика. Эйбл ввел шесть классов богатства (0, 1, ..., 5), так что для класса 0 $30 \leq N \leq 49$, а для класса 5 $N \geq 300$. Этот каталог охватывает небо к северу от склонения -27 . Богатые скопления южного неба были каталогизированы в работе Abell et al. (1989). Вместе эти две компиляции содержат 4704 скопления.

Такие скопления редки, но их можно увидеть с далекого расстояния в пространстве. Коллекция Эйбла была результатом фотографического обзора всего северного неба. Обзор был выполнен на большом 48-дюймовом телескопе Паломарской обсерватории — невероятно важная наблюдательная программа, давшая астрономам огромное количество данных о звездах и галактиках. Девятьсот копий 60×60 см фотографий Паломарского Атласа Неба были основным инструментом наблюдательной астрономии в обсерваториях по всему миру в течение десятилетий. Теперь вопрос стоял так: образуют ли богатые скопления Эйбла сверхскопления?

4.2.2. Конференция 1961 года в Санта-Барбаре

Международная конференция “О стабильности галактических систем”, состоявшаяся в Санта-Барбаре, Калифорния, в 1961 году, была посвящена гипотезе Амбарцумяна о нестабильности звездных и галактических систем. Ведущие специалисты по внегалактической астрономии представили свои работы по кластеризации галактик на различных масштабах, от двойных галактик до сверхскоплений. Хотелось бы упомянуть, что уже здесь де Вокулер (de Vaucouleurs, 1961) представил свое исследование соотношения плотность-радиус для галактических систем на различных масштабах (см. ниже). Он подчеркнул, что нет никаких признаков, что в наблюдаемом диапазоне достигнут уровень постоянной плотности, так что средняя постоянная плотность, возможно, будет достигнута только на масштабах, в 10 раз превосходящих Локальное Сверхскопление (т.е. $300h_{100}^{-1}$ Мпк).

На той же конференции Эйбл (1961) представил свою работу по богатым скоплениям галактик и их сверхскоплениям. Типичные скопления второго порядка содержат 10 скоплений и имеют размеры $50h_{75}^{-1}$ Мпк. В итоговом обзоре конференции Нейман, Пейдж и Скотт писали: “И Эйбл, и де Вокулер чувствуют, что существование сверхскоплений несомненно установлено, и что размеры скоплений второго порядка (скопления скоплений галактик) составляют от 30 до 60 Мпк. Это означает, что скопления нельзя рассматривать как изолированные системы, погруженные в изотропную однородную среду галактик поля”.

Здесь специалисты по математической статистике Ежи Нейман и Элизабет Скотт признали, что их классической двухуровневой иерархической модели (Neuman & Scott, 1952) недостаточно, чтобы объяснить действительное распределение галактик, и для описания наблюдений требуется какая-то кардинально новая концепция кластеризации.

Следующее свидетельство крупномасштабной кластеризации было получено из обзора галактик Ликской обсерватории в работе Shane & Wirtanen (1967). Его результаты были обобщены в важной статье Shane (1975), по времени близкой к концу периода двумерных галактических каталогов. Был подведен итог: “Кластеризация кажется общим, если не универсальным свойством среди галактик. Мы находим конгломераты все большего размера, содержащие такое количество скоплений, которые простираются на линейные расстояния до 30 Мпк. Есть свидетельства, которые наводят на мысль о еще более крупных совокупностях галактик на масштабах 100 Мпк и больше”.

4.2.3. Космологический закон де Вокулера

Самым интересным открытием в 1930-е годы было то, что неоднородности в распределении галактик обладают интригующей регулярностью. Американский астроном Эдвин Френсис Карпентер исследовал скопления галактик и обнаружил, что плотность числа галактик зависит от размера скопления так, что меньшую плотность имеют более крупные скопления. Он вычислил, что число галактик N в скоплении растет с размером r как

$$N(r) \propto r^{1.5}. \quad (117)$$

Carpenter (1938) рассматривал эту зависимость как некое космическое ограничение, так что скопление заданной протяженности может содержать не более ограниченного числа членов. Это соотношение простирается от пар галактик до крупных систем из сотен членов. В этом Карпентер усмот-

рел идею, что малые группы и крупные скопления по сути не различаются: “...объекты, которые общепринято считать физическими скоплениями, являются просто экстремумами неоднородного, хотя и не случайного распределения, которое ограничено по плотности...”

Следующий шаг сделал Kiang (1967) из ирландской обсерватории Дансинк. Проанализировав распределения эйбеловских скоплений вместе с искусственными распределениями, сгенерированными на компьютере, он пришел к выводу, что: *моделированием простой кластеризации с помощью однородных скоплений не удастся представить мир эйбеловских объектов, точно так же, как это не удастся в мире галактик*. Здесь он ссылается на модель, предложенную в статье Neuman & Scott (1952), в которой галактики встречаются в скоплениях, равномерно распределенных в пространстве. Кианг выдвинул гипотезу, что *кластеризация галактик происходит на всех масштабах* — не существует четких разграничений иерархических уровней. Он хотел визуализировать расположение галактик так, чтобы различные скопления взаимно проникали друг в друга. При этом гарантируется, что средняя плотность не зависит от объема. Он близко подошел к современной идее фрактальной кластеризации, но не сделал решающего шага к концепции фрактала и считал, что средняя космическая плотность повсюду одинакова. Позднее Kiang & Saslow (1969) обнаружили, что кластеризация простирается, по крайней мере, до масштабов 100 Мпк.

В статьях Karachentsev (1966, 1968) к результату Карпентера был добавлен важный новый аспект. Были оценены средние характеристики 143 систем, от двойных галактик до сверхскоплений. Караченцев обнаружил свидетельство того, что плотность светящейся и плотность полной (вириальной) массы убывают при увеличении размера системы. Так впервые было показано, что соотношение масса-радиус для скрытой массы также является степенной зависимостью, но с показателем степени, отличающимся от показателя для светящегося вещества.

Де Вокулер сделал решающий шаг в признании космологической значимости кластеризации галактик. На основании своих предыдущих работ, а также исследований Карпентера, Кианга и Караченцева, он вычислил по новым данным плотность вещества внутри галактических систем различного размера. Результаты своих размышлений он опубликовал в 1970 году в статье “Аргументация в пользу иерархической космологии”. Продолжая свою более раннюю работу (de Vaucouleurs, 1961), он предположил, что в мире галактик су-

ществует универсальный закон плотность-размер:

$$\rho(r) = \rho_0(r_0)(r/r_0)^{-\gamma}, \quad (118)$$

где $\rho(r)$ — плотность массы в сфере радиуса r , ρ_0 и r_0 — плотность и радиус элементов начального уровня структуры, а γ — показатель степени экспоненциального закона. На основании имевшихся тогда данных он получил для показателя степени γ величину ≈ 1.7 .

De Vaucouleurs (1970, 1971) подвел итог всем известным на тот момент свойствам галактической кластеризации, сделав следующий вывод: “В 1930-е годы астрономы утверждали, а космологи верили, что за исключением, возможно, нескольких скоплений галактики рассеяны в пространстве случайным образом; в 1950-е годы то же свойство приписывалось центрам скоплений; теперь существует надежда, что, если сверхскопления сохранятся (а они, по-видимому, сохранятся), то они, по крайней мере, представляют собой последний масштаб кластеризации, о котором нам нужно беспокоиться”.

Он рассмотрел два возможных случая поведения соотношения плотность-радиус и предложил рассмотреть их как тест на природу кластеризации галактик. В первом случае плотность может убывать гладко и монотонно, что происходит, если не существует выделенных размеров скоплений. Фактически это то, что теперь называется стохастическим фрактальным распределением. Во втором случае кривая плотности может иметь ряд пиков на нескольких выделенных масштабах, в качестве которых он предложил 10 кпк (галактики), 100 кпк (пары и кратные галактики), 1 Мпк (группы и скопления), 10 Мпк (сверхскопления) и 100 Мпк (скопления третьего порядка). В ретроспективе можно отметить, что современный корреляционный анализ наблюдаемого распределения галактик указал на первый случай, без выделенных размеров.

4.3. Ранние аргументы в пользу однородности распределения галактик

Любопытно, что параллельно с накоплением данных о кластеризации галактик росло и число аргументов в пользу однородности распределения галактик. Согласно этому взгляду, скопления считались исключительными объектами на небе. Приведем свидетельства в пользу однородности, существовавшие вплоть до 1970-ых годов:

- подсчеты галактик, выполненные Хабблом;
- флуктуации числа галактик из-за вариаций поглощения пылью в нашей Галактике;
- Аргумент Сэндиджа–Тамманна–Харди, основанный на локальном линейном законе

Хаббла;

- *изотропное распределение далеких объектов.*

4.3.1. Хаббловские подсчеты ярких галактик

Hubble (1926) по своим подсчетам ярких галактик сделал вывод, что до звездной величины $m=16$ они соответствуют ожидаемым при однородном распределении галактик в пространстве. Это широко рассматривалось как доказательство в пользу однородной космологической модели. Таким образом, в качестве космологического теста Хаббл использовал для галактик соотношение число-звездная величина.

Фундаментальное уравнение звездной статистики при применении к объектам, имеющим степенное радиальное распределение плотности $n \propto r^{-\gamma}$ или фрактальное соотношение число-радиус $N \propto r^D$, означает, что число объектов $N(m)$, имеющих звездную величину, не превосходящую m , подчиняется соотношению

$$N(m) = \frac{D}{5}m + \text{const} \quad (119)$$

с фрактальной размерностью $D = 3 - \gamma$. Этот результат не зависит от функции светимости объектов. Следовательно, для однородного распределения ($\gamma=0$; $D=3$) получаем классический закон Зеелигера

$$N(m) = 0.6m + \text{const}. \quad (120)$$

Hubble (1926) обнаружил, что для фотографических величин в интервале $8^m \div 12^m$, а также в точке 16.7 справедлив “закон 0.6m”, хотя он отметил небольшое систематическое отклонение, которое он приписал либо наблюдательным ошибкам, либо “кластеризации туманностей вблизи от галактической системы” (рис.7). В интервале $10^m \div 13^m$ этот результат был подтвержден также в работе Shapley & Ames (1932) в их каталоге для суммарных подсчетов на северном и южном небе.

Для ярких галактик ($m < 16$) большим недостатком было отсутствие данных для интервала звездных величин $12^m \div 16^m$ (см. рис.7). Мы обсудим современные данные для этого интервала в разделе 5.4.2.

Хаббл был убежден, что его данные по подсчетам ярких галактик уже показывают однородность. Он считал, что скопления галактик содержат только малую часть всех галактик, и что реальное пространственное распределение вполне однородно. Вывод Хаббла оказал большое влияние на теоретическую космологию, как сказал Эйнштейн в 1933 году (цитата из работы Peebles, 1980): “Кроме того, исследование Хаббла показало, что эти объекты распределены в пространстве статистически однородным образом,

посредством чего схематическое предположение теории однородной средней плотности получает экспериментальное подтверждение.” С этого времени картина однородного галактического поля с редкими флуктуациями в виде скоплений стала парадигмой однородной внегалактической Вселенной.

Позднее Sandage, Tammann и Hardy (1972) использовали подсчеты ярких галактик Хаббла, чтобы показать несовместимость с иерархической моделью де Вокулера с $\gamma=1.7$. Для этого значения γ уравнение (119) означает, что $N(m) = 0.26m + \text{const}$, а это явно отличается от значения $0.6m$, полученного по подсчетам Хаббла и Цвикки, имевшимся в то время. Тем самым они показали, что иерархическая модель с фрактальной размерностью $D=1.3$ не может объяснить подсчеты ярких галактик. Здесь мы должны подчеркнуть, что современные подсчеты ярких галактик в диапазоне $10^m \div 14^m$ демонстрируют наклон 0.44, что соответствует $D=2.2$. Мы обсудим это в разделе 5.4.2.

4.3.2. Хаббловские глубокие подсчеты галактик

Hubble (1934, 1936, 1937) расширил подсчеты галактик до 21-й звездной величины в своей программе массовых подсчетов галактик по 1184 фотографиям в случайных точках неба. Каждая пластинка покрывала 0.25 кв. град. На этот раз он не подтвердил предсказание $0.6m$ для слабых величин. Вместо этого подсчеты следовали закону $0.5m$. Хаббл не отказался от гипотезы однородности, а попытался объяснить это отклонение влиянием красного смещения на звездную величину галактик. Он выполнил нечто вроде К-коррекции и пришел к выводу, что закон $0.6m$ можно получить только в нерасширяющейся вселенной. Это привело к тому, что до конца жизни (1953) Хаббл считал, что космологическое красное смещение может быть вызвано какой-то другой причиной, отличной от расширения.

Sandage (1995b; 2004) проанализировал программу подсчетов Хаббла и обнаружил три вида систематических ошибок, повлиявших на вычисления Хаббла: 1) в хаббловских фотографических звездных величинах существовали систематические ошибки, которые были тем больше, чем слабее были объекты, делая их ярче; 2) Хаббл использовал ошибочную К-поправку; 3) при вычислении пространственных объемов, соответствующих различным красным смещениям в фридмановской модели, Хаббл использовал не тот тип расстояния. В свете этих проблем теперь ясно, что старый результат Хаббла по слабым галактикам нельзя использовать ни как доказательство однородности ни как доказательство отсутствия рас-

ширения.

4.3.3. Вариации поглощения пылью

Одним из аргументом против реальности сверхскоплений было наличие “запыленного окна” во внегалактический мир. Поскольку первые данные о сверхскоплениях галактик были получены по распределению на небе, то было естественное возражение, что нужно учитывать переменное ослабление света в разных направлениях на небесной сфере из-за того, что пылевые облака неоднородно распределены по Млечному Пути.

Виктор Амбарцумян разработал теорию флуктуаций поглощения Галактики и применил ее к подсчету внегалактических туманностей (Ambartsumian, 1940; 1951). Статья Neuman & Scott (1952) была посвящена модели двухуровневой кластеризации, позднее ставшей широко известной. Ссылаясь на работы Charlier (1922) и Ambartsumian (1951), они подчеркнули, что в принципе существует два подхода к кластеризации галактик: 1) галактики действительно сгущаются в пространстве; 2) видимая кластеризация на небе вызвана переменной экстинкцией из-за межзвездных облаков пыли. Какой из этих факторов доминирует для скоплений и сверхскоплений?

Затем Warwick (1950), Holmberg (1974) и Fesenko (1975) продолжили исследование роли неоднородной пыли в видимой кластеризации галактик и пришли к выводу, что пыль существенно изменяет наблюдаемую кластеризацию.

В 1950-е годы Zwicky (1955, 1957) предположил, что причиной ослабления фоновых скоплений может быть и межгалактическая пыль, сконцентрированная в скоплениях галактик. Он исследовал распределение 921 скопления и обнаружил нехватку скоплений в областях, окружающих галактические скопления в созвездиях Virgo, Coma и Ursa Maior. Он интерпретировал это как затмение межгалактической пылью.

По подсчетам фоновых скоплений Karachentsev, Lipovetskii (1969) тоже получили положительное среднее значение экстинкции света в скоплениях галактик. Их результат давал 0.2 зв. величины в полосе В. Они указали также, что на подсчеты Цвики, возможно, повлияли эффекты селекции. Например, для далеких скоплений, которые находятся позади близких скоплений, труднее выполнить критерии идентификации. Отметим, что Mattila (1977) измерил рассеянный свет в скоплении Coma и пришел к выводу, что какая-то его часть может быть рассеянным светом от межгалактической пыли внутри скопления. Позже он измерил вместе со Stickel et al. (1998) далекое инфракрасное излучение пыли в Coma. Излучение

было обнаружено, и было посчитано, что оно может вызывать около 0.2 зв. величины экстинкции или меньше.

Кстати, Teerikorpi (2002) показал по покраснению квазаров, видимых через галактические гало (оптические спектры этих квазаров содержат узкие абсорбционные линии на существенно более низких красных смещениях), что гало вызывает примерно 0.2 зв. величины экстинкции. Внутри компактных галактических скоплений и вокруг ядер богатых скоплений, таких как Coma, галактические гало могут почти перекрываться в проекции, и только по одной этой причине можно ожидать экстинкцию порядка 0.1 зв. величины.

Любопытно отметить, что Zwicky & Rudnicki (1963) пришли к выводу, что с учетом эффектов межзвездного и межгалактического поглощения ... полученные результаты подтверждают предположение, что распределение скоплений галактик однородно в пределах пространства с характерным радиусом порядка 10^9 пк. Они сделали заключение, что скопления имеют различные размеры — максимум до 40 Мпк, и что сверхскоплений не существует.

Однако аргумент экстинкции потерял силу после того, как массовые измерения красных смещений галактик привели к открытию весьма комковатого их пространственного распределения. Отметим, что исследование галактической экстинкции остается актуальным для многих внегалактических объектов, включая флуктуации космического фонового излучения.

4.3.4. Аргумент в пользу “линейности” закона Хаббла

De Vaucouleurs (1970) предположил, что флуктуации плотности массы вызывают отклонения от закона Хаббла и, в частности, в его иерархической модели гравитация внутри Локального Сверхскопления должна уменьшать хаббловскую скорость расширения. Его аспирант Wertz (1971) разработал ньютоновскую расширяющуюся иерархическую модель и вычислил предсказанное отклонение от линейного закона Хаббла: “константа” Хаббла должна увеличиваться с увеличением расстояния в пределах 20 Мпк от нас.

К тому времени Сэндидж получил красные смещения для 82-х ярчайших галактик скоплений первого ранга, которые позволяли проверить предсказание иерархической модели. Такая проверка была осуществлена в работе Sandage et al. (1972), где наблюдения были сопоставлены с вычислениями Wertz (1971) и Haggerty & Wertz (1972) для предсказанного отклонения от линейного закона “красное смещение — расстояние”. Результат про-

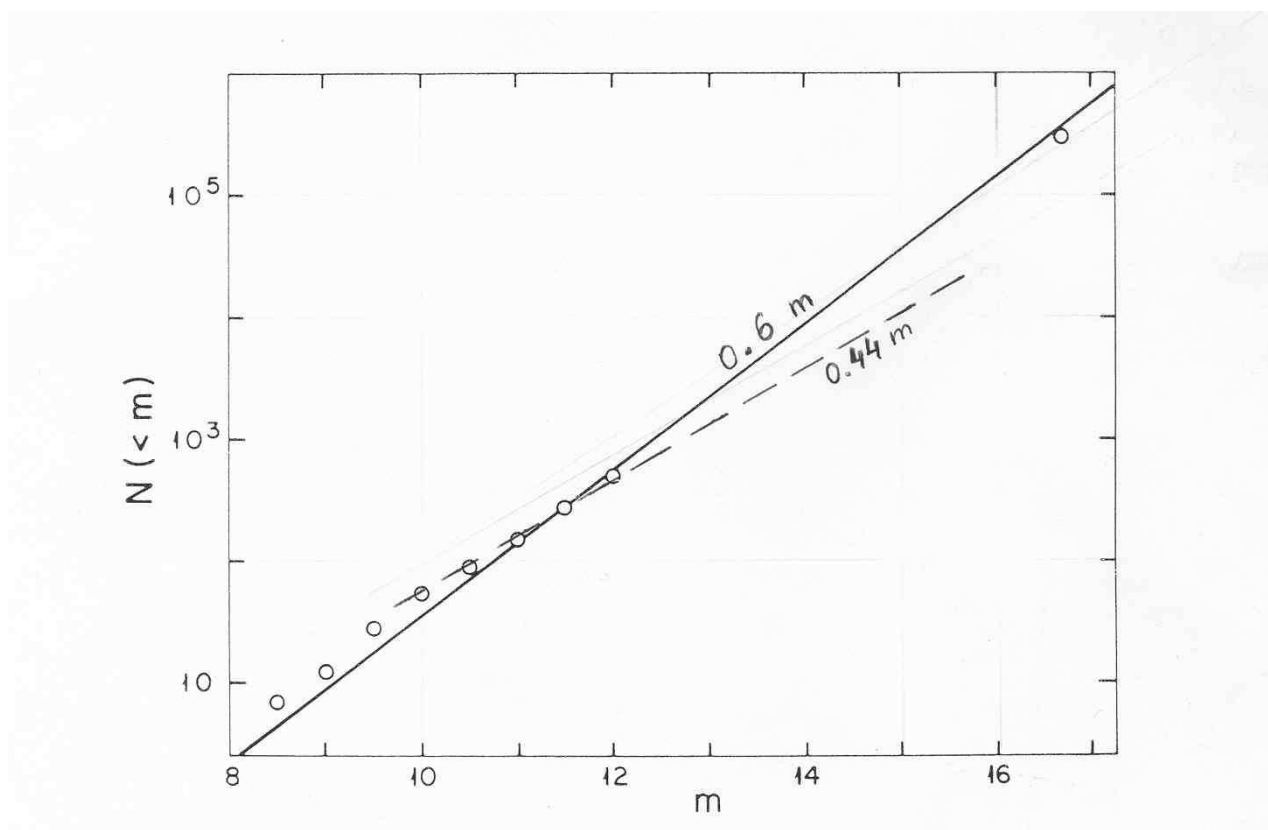


Рис. 7: Ранний результат Хаббла (1926) по подсчетам ярких галактик. Единичная точка на 16-ой зв. величине основывалась на старых данных Фата. Жирная прямая линия имеет наклон 0.6, что соответствует однородной космологической модели. Пунктирная прямая представляет современные данные по базе данных LEDA и показывает наклон 0.44 в диапазоне $10^m - 14^m$, соответствующий фрактальной размерности $D=2.2$ (Teerikorpi, 2004).

верки оказался поразительным: был установлен линейный закон Хаббла с $H_0 = \text{const}$ для всех проверенных масштабов, тогда как иерархическая модель предсказывала такое сильное отклонение, что никакого космологического расширения на расстояниях ближе, чем 20 Мпк, не должно быть видно. Более поздние наблюдения только усилили аргумент в пользу линейности: гладкий линейный поток Хаббла начинается в окрестностях Локальной Группы уже на расстоянии 1.5 Мпк (Sandage & Tammann, 1975; Sandage, 1986, 1987, 1999; Ekhholm et al., 2001; Karachentsev et al., 2002, 2003a,b; Whiting, 2003).

В действительности этот тест имеет более глубокое значение, чем просто проверка иерархического распределения светящегося вещества. Он продемонстрировал парадокс: оба эмпирических факта были истинными, т.е. сильно неоднородное распределение галактик в локальной вселенной и невозмущенный линейный закон Хаббла на одних и тех же масштабах. Сэндидж, Тамман и Харди предложили два возможных решения это-

го парадокса: 1) параметр плотности массы может быть очень малым, $\Omega_0 \ll 1$, или 2) может существовать невидимая однородная среда высокой плотности. В обоих случаях возмущения закона Хаббла будут очень малы. Фактически из этого пост-классического космологического теста вышло целое новое направление, изучающее свойства очень локального холодного потока Хаббла (Chernin, 2001; Baryshev et al., 2001; Karachentsev et al., 2003a; Macciò et al., 2004).

De Vaucouleurs (1972) представил свидетельство искривления закона Хаббла в локальной галактической вселенной (“константа” Хаббла, полученная по ярчайшим членам групп, сильно возрастала от малых расстояний к большим). Однако Teerikorpi (1975a) изучил реальность такого поведения, используя спиральные галактики с известными классами светимости ван ден Берга L_c , которые также показывали похожее увеличение H , но с систематическим сдвигом, зависящим от L_c . Это послужило важной подсказкой, что данное явление является не реальным, а вызывается селек-

цией, по-разному влияющей на измерения расстояний. В статьях Teerikorpi (1975b, 1982, 1997) эта переменность была удовлетворительно промоделирована и для классов светимости с гауссовскими функциями светимости, и для критерия ярчайших членов группы.

В статье Teerikorpi (1975a) эффект селекции и его влияние на график классификации светимости V/R (“константа Хаббла”) как функции от V (лучевая скорость) были объяснены просто. Это служит примером того, как наблюдательные ограничения могут вызвать сильное смещение.

Предположим, что для выборки галактик существует предельная зв. величина m_l . Тогда для изучения кинематики локальной вселенной на графике M как функции $\log R$ (R — расстояние в Мпк) доступны только галактики, находящиеся ниже прямой $M = m_l - 25 - 5\log R$.

Рассмотрим теперь класс галактик с истинной средней абсолютной зв. величиной M_0 . Тогда селекция начинает влиять на определение расстояний, по крайней мере, на расстоянии R_0 , где $M_0 = m_l - 25 - \log R_0$. Легко показать, что если R является ошибочным расстоянием, вычисленным по M_0 при реальном расстоянии $R = V/H$, тогда нижняя огибающая точек на графике V/R как функция от V определяется уравнением $V/R = V/R_0$ (когда $R > R_0$). Отметим, что наклон зависит от R_0 , т.е. от M_0 рассматриваемого класса светимости, когда предельная звездная величина постоянна.

4.3.5. Изотропия в однородной вселенной

Классически, из изотропии вокруг одного наблюдателя, в совокупности с космологическим принципом Коперника (“все точки одинаковы”), можно вывести глобальную однородность космологического флюида (Walker, 1944; простые геометрические аргументы см. в работе Weinberg, 1977, стр.24). До 1970-ых годов существовали три основных наблюдательных свидетельства в пользу изотропного распределения вещества вокруг нас.

Во-первых, хаббловские глубокие подсчеты слабых галактик (до $m \approx 21$) не показали большой разницы в различных направлениях на небе после коррекции за галактическую экстинкцию. Правда, Шепли (Shapley, 1943) заметил значительную разницу в числе ярких галактик (до $m_{pg} = 13$) на северном и южном галактических полушариях. Он обнаружил также, что на $m \approx 18$ численности галактик могут отличаться по небу в 2 раза на угловых масштабах 30° . Однако эти отклонения рассматривались как локальные флуктуации.

Во-вторых, было обнаружено, что тысячи слабых радиосточников в ранних каталогах (4С,

Parkes, Molongolo и др.) распределены по небу однородно в пределах статистической неопределенности (см., например, Holden, 1966; Webster, 1976, 1977).

В-третьих, уже первые измерения фонового космического излучения, описанные в статьях Conklin & Bracewell (1967) и Penzias et al. (1969), обнаружили замечательную изотропию на уровне $\Delta T/T < 10^{-3}$ на всех угловых масштабах вплоть до минут дуги.

Эта изотропия в целом интерпретировалась как сильное доказательство однородности на масштабах, превосходящих 1000 Мпк. Можно ли иметь локальную изотропию внутри неоднородного распределения вещества? Для самоподобных статистически изотропных фрактальных структур ответ — “да”. Этот вопрос связан также с более общей формулировкой Космологического Принципа, который будет обсужден в последнем разделе.

4.4. Результаты, полученные по каталогам угловых положений галактик

4.4.1. Основные каталоги галактик и скоплений

В 1950-60-е годы появились первые обширные каталоги галактик и их скоплений, основанные на исследовании монументального фотографического обзора Паломарского атласа неба. Это был золотой век галактических каталогов угловых положений, по которым изучалось распределение галактик без информации о расстоянии, получаемой по красному смещению. Эта важная эпоха двумерности подошла к концу в 1970-е годы, когда был завершен анализ данных всех существовавших каталогов.

Главными каталогами были Каталог ярких галактик Shapley-Ames (1932), каталог богатых галактических скоплений Эйбла (Abell, 1958), опорный каталог де Вокулеров (de Vaucouleurs & de Vaucouleurs, 1964), Каталог галактик и галактических скоплений Цвики (Zwicky et al., 1961-1968) и Ликские подсчеты в ячейках (Shane & Wirtanen, 1967).

4.4.2. Анализ угловой корреляционной функции

Главным математическим инструментом при анализе названных каталогов был метод угловой корреляционной функции, подробно описанный в работе Peebles (1980). Угловая корреляционная функция $w(\theta)$ определяется аналогично функции $\xi(r)$ как избыточная вероятность относительно пуассоновского распределения обнаружить объект в телесном угле $\delta\Omega$ на угловом расстоянии θ от слу-

чайню выбранных объектов в выборке:

$$\delta P = n\delta\Omega[1 + w(\theta)]. \quad (121)$$

Здесь n — средняя поверхностная плотность объектов на небе.

Практическую оценку $w(\theta)$ для выборки из N галактик с известными положениями на небе можно получить, подсчитывая объекты в кольцах радиуса θ шириной $\delta\theta$. Условие нормировки

$$N = n \int_{d\Omega_s} [1 + w(\theta)] d\Omega, \quad (122)$$

где Ω_s — телесный угол обзора. Важным практическим моментом является то, что если проекция на небесную сферу неоднородного пространственного распределения оказывается близкой к однородной, тогда этот метод не может выявить такую истинную неоднородность, а рассматривает ее как бесструктурное пуассоновское распределение. Мы увидим, что именно это и произошло с пространственными структурами, имеющими фрактальную размерность $D \geq 2$.

4.4.3. Угловая и пространственная корреляционные функции

Основной целью анализа каталогов угловых положений была оценка пространственной корреляционной функции $\xi(r)$ по прямо измеренному угловому распределению галактик. Соотношение между $w(\theta)$ и $\xi(\theta)$ впервые вывел Limber (1953), уже в контексте галактик (полезный обзор выполнил Fall (1979)). Для малых углов θ уравнение Лимбера

$$w(\theta) = \int_0^\infty dx x^4 \phi^2 \frac{\int_{-\infty}^\infty dy \xi[(x^2\theta^2 + y^2)^{1/2}]}{[\int_0^\infty dx x^2 \phi(x)]^2}. \quad (123)$$

Здесь $\phi(x)$ — функция селекции, определяемая как доля галактик в единице объема пространства, наблюдаемых на расстоянии x от Земли.

Уравнение (123) можно аналитически инвертировать, чтобы получить функцию $\xi(r)$. Однако отрицательным моментом является то, что эта процедура требует дифференцирования наблюдательных данных, которые всегда содержат шум, увеличивающий ошибки (Fall & Tremaine, 1977).

Важным частным случаем, полезным на практике, является решение уравнения (123) в виде степенного закона. Для пространственной корреляционной функции в виде

$$\xi(r) = Br^{-\gamma} = Br^{-(3-D)} \quad (124)$$

соответствующая угловая корреляционная функция — это просто

$$w(\theta) = A\theta^{1-\gamma} = A\theta^{D-2}, \quad (125)$$

где константа A определяется из наблюдений, а константа B зависит от γ и функции отбора ϕ (Fall, 1979).

Внимание: степенное решение (уравнение (125)) существует, только если

$$\gamma > 1, \quad D < 2. \quad (126)$$

Как уже обсуждалось в разделе 2.4.5, согласно теореме о проекции фракталов, это означает, что данный метод не работает для фрактальных структур с фрактальной размерностью $D \geq 2$. Как мы увидим далее, реальное распределение галактик характеризуется величиной D , которая находится именно в пределах этого критического диапазона!

4.4.4. Иерархические модели с $D = 1.2$ для каталогов угловых положений галактик

В своей пионерской работе Totsuji & Kihara (1969) на основе данных Ликских подсчетов галактик получили степенной вид угловой корреляционной функции

$$w(\theta) = A\theta^{-0.8}, \quad (127)$$

из которой они, в конце концов, получили

$$\xi_{\text{TK}}(r) = \left(\frac{4.7h_{100}^{-1} \text{Mpc}}{r} \right)^{1.8}. \quad (128)$$

В 1973 году Пиблс начал обширную программу анализа всех каталогов угловых положений галактик и скоплений и доказал, что все каталоги характеризуются почти одним и тем же степенным законом с $\gamma=1.77$ и $r_0 = 5h_{100}^{-1}$ Мпк в диапазоне масштабов $0.1 \div 10$ Мпк. Обзор этих результатов приведен в работе Peebles (1980; 2001).

Фактически это было повторное открытие космологического соотношения плотность-радиус де Вокулера на малых масштабах $0.1 \div 10$ Мпк. Totsuji & Kihara (1969) и Peebles (1974a) впервые обнаружили, что корреляционная функция галактик является непрерывным степенным законом без пиков, как можно было бы ожидать для выделенных масштабов (случай 2 в статье de Vaucouleurs, 1970). Таким образом, она естественно отражает самоподобие фрактальных структур. Показатель степени $\gamma=1.8$ соответствует фрактальной размерности $D=1.2$.

Новая появившаяся картина непрерывной иерархии вдохновила на построение протофрактальных моделей для пространственного распределения галактик. Peebles (1974b) попытался найти общую функцию светимости галактик, согласующуюся со степенной иерархией. Soneira & Peebles (1977, 1978) построили статическую иерархическую модель галактической вселенной. Они ис-

пользовали регулярную иерархическую модель типа Фурнье с 12 уровнями галактических пар, так что $k_N = 2$, а $k_r = 1.76$ и, согласно уравнению (11), фрактальная размерность $D=1.23$ или показатель степени корреляции $\gamma = 1.77$. Положения галактик определялись в соответствии с иерархией пар. Для создания выборки с ограничением по звездной величине использовалась функция светимости и видимая предельная зв. величина. И наконец, галактики проецировались на небесную сферу. Soneira & Peebles (1978) сравнили эту иерархию пар с Ликскими подсчетами галактик и пришли к выводу, что даже такая простая модель хорошо воспроизводит угловую корреляционную функцию наблюдаемого распределения галактик. Для *Каталога галактик и скоплений галактик* (Zwicky et al., 1961-68) Soneira & Peebles (1977) вывели, что нет свидетельств пространственно однородного населения галактик поля. Это подтвердило общую тенденцию галактик появляться только в скоплениях.

4.4.5. Таллиннская конференция 1977 года

Поворотным пунктом в изучении распределения галактик стал Симпозиум МАС N79 “Крупномасштабная структура Вселенной”, состоявшийся в Таллине, Эстония, в сентябре 1977 года. Ведущие астрономы представили наблюдательные и теоретические работы по кластеризации галактик, и это было первым широким обсуждением всех существующих аргументов за и против однородности на внегалактических масштабах.

Peebles (1978) представил обзор анализа угловой корреляционной функции, примененной ко всем имеющимся каталогам угловых положений галактик. Он подчеркнул, что “небольшая систематическая ошибка в угловом распределении может привести к очень большой ошибке в оценке пространственной кластеризации” и что “данные по красному смещению позволяют избежать этой проблемы”. Пиблс утверждал, что на расстояниях ≤ 10 Мпк кластеризация галактик описывается степенным законом, но на более крупных масштабах распределение галактик становится однородным. Он впервые сослался на книгу Mandelbrot (1977), в которой идея фрактала распространялась на внегалактические масштабы.

В работе Joeveer & Einasto (1978) был представлен анализ имеющихся данных по красным смещениям и был сделан вывод, что галактическая Вселенная имеет ячеистую структуру со средним диаметром пустот около $50h_{100}^{-1}$ Мпк. На симпозиуме существование крупномасштабных структур и пустот различного размера продемонстрировали также де Вокулер, Талли, Фишер, Эйбл, Тифф, Грегори, Калинков и другие.

В своих заключительных замечаниях Longair (1978) отметил: “Все, кажется, согласилось с существованием сверхскоплений . . . систем на масштабах $\sim 30-100$ Мпк”. Однако, говоря о результатах анализа угловой корреляционной функции, выполненного группой Пиблса, которая получила масштаб однородности на 10 Мпк, Лонгейр заявил: “Я все-таки твердо верю в фундаментальную правильность ковариационного анализа”. Хотя результаты, представленные командой Калинкова, о кластеризации третьего порядка указывали на тенденцию к непрерывной галактической кластеризации, Лонгейр подчеркнул: “Интересно, согласуется ли их существование с изотропией распределения внегалактических радиоисточников и микроволнового фонового излучения?”

4.4.6. Первые свидетельства в пользу распределения галактик с $D=2$

Хотя по анализу угловой корреляционной функции была получена величина фрактальной размерности $D \approx 1.2$ ($\gamma = 1.8$), были и другие доказательства, указывающие на фрактальную размерность $D \approx 2$. С исторической точки зрения любопытно, что Lundmark (1927), в сущности, сделал первую наблюдательную оценку фрактальной размерности на основе модели Шарлье, отметив, что выполняется второй критерий, что соответствует $D=2$.

Baryshev (1981) обсудил некоторые наблюдательные и теоретические аргументы в пользу фрактальной размерности $D \approx 2$. Используя такие наблюдательные космологические данные, как 1) подсчеты числа галактик $N(m)$ в широком интервале зв. величин от 2^m до 24^m , 2) соотношение “плотность вириальной массы – радиус” $\rho_{vir}(R)$, 3) соотношение “дисперсия пекулярных скоростей – радиус” $\sigma_v(R)$, Барышев пришел к выводу, что иерархическая модель распределения галактик с $\gamma = 1$ (фрактальная размерность $D = 2$) согласуется с наблюдениями. В этой статье был приведен новый теоретический аргумент, указывающий на особое свойство фрактала с размерностью $D = 2$. Он взят из рассуждений Bondi (1947) о той части космологического красного смещения, которая обусловлена глобальным гравитационным красным смещением. Для однородного распределения вещества в случае $z \ll 1$ гравитационное космологическое красное смещение равно

$$z_{grav} = \frac{\delta\phi(r)}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{GM(r)}{c^2 r} = \frac{1}{4} \Omega_0 \left(\frac{r}{r_H} \right)^2, \quad (129)$$

где $\delta\phi(r) = \phi(r) - \phi(0)$ есть разность гравитационных потенциалов между наблюдателем и источником, а $r_H = c/H_0$ – радиус Хаббла.

Очень важно, что из принципа причинности следует, что в данной задаче источник света должен находиться в центре шара с радиусом, равным расстоянию r между источником и наблюдателем. Отметим, что Zeldovich & Novikov (1984, стр. 97) и Reasock (1999, задача 3.4) помещали наблюдателя в центр шара и, следовательно, получали гравитационное голубое смещение вместо гравитационного красного смещения Бонди. Однако такой выбор системы отсчета нарушает причинность в рассматриваемом процессе. Действительно, событие излучения фотона источником (который отмечает центр шара) должно предшествовать событию обнаружения фотона наблюдателем. Более позднее событие детектирования фотона отмечает границу сферы, где находятся все потенциальные наблюдатели излученного фотона через время $t = r/c$.

Обобщая уравнение (129) на случай фрактального распределения, при котором $M(r) \propto r^D$, можно получить следующее соотношение для гравитационной части космологического красного смещения в пределах фрактального распределения галактик:

$$z_{grav} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{c^2 D(D-1)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{D-1}, \quad (130)$$

где ρ_0, r_0 — это плотность и радиус нулевого уровня фрактальной структуры (галактик, в нашем случае).

Для фрактальной структуры с $D = 2$ космологическое гравитационное красное смещение является линейной функцией расстояния:

$$z_{grav}(r) = \frac{2\pi G \rho_0 r_0}{c^2} r = \frac{H_g}{c} r, \quad (131)$$

где H_g — гравитационная постоянная Хаббла, которую можно выразить как

$$H_g = 2\pi \rho_0 r_0 \frac{G}{c}. \quad (132)$$

Для структуры с фрактальной размерностью $D = 2$ константу $\beta = \rho_0 r_0$ в действительности можно считать новой фундаментальной космологической константой. Если величина константы $\beta = 1/2\pi$ г/см² (например, $\rho_0 = 5.2 \times 10^{-24}$, а $r_0 = 10$ кпк), тогда $H_g = 68.6$ (км/с)/Мпк. Таким образом, линейный закон Хаббла в пределах фрактальной структуры с $D = 2$ возможен, хотя это требует очень большого количества темного вещества, распределенного фрактально.

4.4.7. Почему каталоги угловых положений теряют информацию о структурах с $D=2$?

Объяснение того, почему трудно изучать фрактальную структуру с размерностью $D \geq 2$ по угловому распределению галактик, впервые приво-

дено в работе Baryshev (1981). Если мы моделируем какую-то часть фрактала как сферическое скопление частиц внутри радиуса R , тогда можно вывести поверхностное распределение $F(\sigma)$ частиц, спроектированное на небо, используя уравнение Абеля

$$F(\sigma) = 2 \int_{\sigma}^R \rho(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}}, \quad (133)$$

где σ — расстояние в проекции на небо от центра сферы.

Для представления степенным законом сферически-симметричной фрактальной структуры $\rho(r) = \rho_0(r_0/r)^{3-D} \propto r^{-\gamma}$ можно получить аналитическое решение в замкнутой форме для фрактальных размерностей 3, 2 и 1. Для однородного шара $D = 3$, $\gamma = 0$

$$F(\sigma) = 2\rho_0 r_0 \frac{R}{r_0} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{R^2}}. \quad (134)$$

Для структуры с $D = 2$, ($\gamma = 0$) получаем

$$F(\sigma) = 2\rho_0 r_0 \left[\ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{R^2}} \right) + \ln \frac{R}{\sigma} \right]. \quad (135)$$

Наконец, для $D=1$ ($\gamma = 2$) получим поверхностную плотность

$$F(\sigma) = 2\rho_0 r_0 \frac{r_0}{\sigma} \arccos \frac{\sigma}{R}. \quad (136)$$

Следовательно, для величин $\sigma \ll R$ поверхностная плотность ведет себя примерно как

$$F(\sigma) \sim const, \quad D = 3, \quad (137)$$

$$F(\sigma) \sim \ln \sigma, \quad D = 2, \quad (138)$$

$$F(\sigma) \sim \sigma^{-1}, \quad D = 1. \quad (139)$$

И для $D = 2$, и для $D = 3$ поверхностная плотность меняется незначительно. Это означает, что спроектированное распределение выглядит на небе как имеющее однородную поверхностную плотность.

Эти выкладки показывают, что анализ угловой корреляционной функции становится неэффективным для структур с фрактальной размерностью, близкой или превышающей 2, поскольку информация о пространственных структурах с $D \geq 2$ теряется, так как спроектированное на небесную сферу распределение кажется однородным. Как мы уже подчеркивали, этот результат является следствием общей теоремы о проекции фрактальных структур (раздел 2.4.5), где критическая размерность $D_{pr} = 2$.

5. Дебаты о фрактальности: эпоха пространственных карт

В конце 1980-х годов появились несколько каталогов красных смещений галактик (см. табл. 1) и стал возможным анализ пространственных карт. Это позволило обнаружить различное поведение корреляционной функции ξ для разных выборок галактик и скоплений, что оказалось неожиданным. Тогда некоторые исследовательские группы осознали, что фрактальное распределение галактик может естественно объяснить особенности измеренной ξ -функции, и что подходящим математическим инструментом для анализа фракталов является метод Г-функции. С этого времени фрактальный подход дал начало новым плодотворным направлениям наблюдательных и теоретических исследований.

5.1. Фрактальный прорыв в 1980-е годы

После того, как на сцене крупномасштабной структуры Вселенной появились фракталы, космологическое сообщество разделилось на две части. Одни продолжали использовать метод ξ -функции, который приводил к выводу, что “хорошей” выборки галактик не существует. Вторая, меньшая группа, начала использовать фрактальный подход, основанный на методе Г-функции, и получила согласованные результаты по различным галактическим выборкам.

5.1.1. Анализ выборки галактик CfA с помощью корреляционной ξ -функции, выполненный Дэвисом и Пиблсом

Работа Davis & Peebles (1983) (далее DP83) была классической во многих отношениях. В ней приведен первый систематический анализ данных CfA методом редуцированной корреляционной ξ -функции. Каталог CfA был результатом первого крупного обзора красных смещений Гарвард-Смитсоновского Центра Астрофизики (CfA), он был полон до $m_B = 14.5$ в областях неба $\delta > 0$, $b > 40^\circ$ и $\delta \geq -2.5^\circ$, $b < -30^\circ$ и содержал 2400 галактик с измеренными красными смещениями.

DP83 выделили ограниченную по объему подвыборку с $M_B < 18.5 + 5 \log h_{100}$, в которой было 1230 галактик в северной области неба и 273 галактики в южной.

В этой работе впервые рассматривались корреляционные функции как для пространства красных смещений, так и для реального пространства, разработанные Peebles (1980). Пекулярные скорости учитывались с помощью метода, рассмотренного нами в разделе 3.2.5. Была найдена средне-

квадратичная дисперсия распределения пекулярных скоростей по лучу зрения

$$\sigma_v(r) = 340 \pm 40 \left(\frac{r}{\text{Mpc } h_{100}^{-1}} \right)^{0.13 \pm 0.04} \text{ km/s.} \quad (140)$$

По среднеквадратичной трехмерной пекулярной скорости “уравнение космической энергии” дает (Peebles, 1980, уравнение 74.9)

$$\langle v_{\text{pec}} \rangle^{1/2} \approx 850 \Omega_0^{1/2} \text{ km/s,} \quad (141)$$

что можно использовать для оценки параметра плотности Ω_0 . По CfA DP83 было получено $\Omega_0 \approx 0.2$ для компоненты вещества, ассоциированного с распределением галактик на масштабах $r < 1 h_{100}^{-1}$ Мпк.

В DP83 была предложена оценка ξ -функции, которую позже назвали стандартной. Для коррекции краевого эффекта и уменьшения шума дискретности на малых масштабах использовалось моделирование искусственного пуассоновского распределения в объеме выборки.

Основной вывод состоял в том, что двухточечная корреляционная функция в реальном пространстве после обращения проекции имеет степенной вид $\xi \propto r^{-\gamma}$

$$\xi_{\text{DP}}(r) = \left(\frac{5.4 h_{100}^{-1} \text{ Mpc}}{r} \right)^{1.74}, \quad (142)$$

в неожиданно широком интервале масштабов

$$10 h_{100}^{-1} \text{ kpc} < r < 10 h_{100}^{-1} \text{ Mpc.} \quad (143)$$

Вместе с оцененными ошибками параметры ξ -функции были равны $r_0 = 5.4 \pm 0.3 h_{100}^{-1}$ Мпк и $\gamma = 1.74 \pm 0.04$. Важно, что для масштабов $r > 10 h_{100}^{-1}$ Мпк ξ -функция падает, меняет знак и начинает осциллировать около нулевого уровня. Из того, что было рассмотрено в разделе 3.2.3 ясно, что именно такое отклонение от степенного поведения ожидается для оценки редуцированной корреляционной функции.

После этой пионерской работы значения единичной шкалы $r_0 \approx 5 h_{100}^{-1}$ Мпк (определяемой как $\xi(r_0) = 1$) и показателя степени корреляции $\gamma \approx 1.8$ обычно рассматривались как стандартные космологические величины (см. статью Peebles (2001) на конференции “Историческое развитие современной космологии”).

Как обсуждалось в разделе 3, метод ξ -функции фактически дает искаженное значение истинного показателя степени γ_{true} фрактальной структуры. Следовательно, эти результаты содержат систематические ошибки. Однако в то время казалось, что первая трехмерная карта дала результаты, согласующиеся с анализом каталогов угловых

положений, и распределение галактик стало считаться однородным на масштабах, превосходящих $20h_{100}^{-1}$ Мпк.

5.1.2. Загадочное поведение ξ -функции

Когда первые обзоры красных смещений исследовались методом ξ -функции, появилась новая неожиданная проблема. Было обнаружено, что характерная длина r_0 зависит от определенных параметров выборок, таких как глубина обзора, тип и светимость галактик и скоплений и среднее расстояние между объектами в выборке.

Вопреки ожиданию, что “пространственная корреляционная функция галактик довольно мала для расстояний, превышающих примерно $20h_{100}^{-1}$ Мпк”, было обнаружено (Bahcall & Soneira, 1983; Klypin & Korylov, 1983), что характерная длина r_0 (а, значит, и амплитуда ξ -функции) оказывается довольно большой для скоплений галактик.

Bahcall & Soneira (1983) вычислили ξ -функцию “красное смещение – пространство” для полной выборки из $N = 104$ эйбловских скоплений с классом расстояний (≤ 4) и получили следующие оценки их параметров:

$$r_0^{cl} \approx 25 h_{100}^{-1} \text{Мпс}, \quad \gamma^{cl} \approx 1.8. \quad (144)$$

Klypin & Korylov (1983) исследовали дру- гую выборку эйбловских скоплений с $z < 0.08$ и $\|b\| \geq 30^\circ$. Их каталог содержал $N=158$ богатых скоплений галактик, включая красные смещения, измеренные на 6-метровом телескопе Специальной астрофизической обсерватории Академии наук СССР. Для этой выборки у ξ -функции в пространстве красных смещений были следующие параметры:

$$r_0^{cl} \approx 25 h_{100}^{-1} \text{Мпс}, \quad \gamma^{cl} \approx 1.6. \quad (145)$$

Эти результаты выявили существенное расхождение между единичными масштабами r_0 для галактик (5 Мпк) и для скоплений (25 Мпк).

Более того, когда посчитали ξ -функцию для сверхскоплений галактик (Bahcall & Burgett, 1986; Lebedev & Lebedeva, 1988), был обнаружен еще более крупный масштаб:

$$r_0^{cl} \approx 60 h_{100}^{-1} \text{Мпс}, \quad \gamma^{cl} \approx 1.8. \quad (146)$$

Согласно этим данным, длина корреляции r_0 возрастает от 5 до $60 h_{100}^{-1}$ Мпк при рассмотрении все более массивных объектов во вселенной.

Еще одно важное свойство этого нового эффекта нашли Einasto et al. (1986), изучавшие поведение r_0 в выборках галактик и скоплений с возрастающим объемом. Они использовали кубическую геометрию для галактических выборок с размером

границы $l = R_s$ (что является глубиной обзора) и обнаружили приблизительно линейное соотношение между единичным масштабом и глубиной выборки:

$$r_0 \propto R_s. \quad (147)$$

В рамках гауссовских флуктуаций плотности на однородном фоне такое поведение ξ -функции – загадочный факт, для объяснения которого обсуждалось несколько возможностей (Kaiser, 1984; Bardin et al., 1986; Davis et al., 1988; Bahcall, 1988; Benoist et al., 1996).

Самой популярной была идея Кайзера о *смещенном образовании галактик* из-за возможной связи между корреляционными функциями для скоплений галактик и для фонового поля плотности. Здесь скопления рассматривались как редкие пятна высокой плотности в поле плотности, так что можно было бы ожидать

$$\xi_{clusters} = b\xi_{density}(r), \quad (148)$$

где b – коэффициент смещения, который равен приблизительно 10, если $\xi_{density} = \xi_{galaxies}$. Это означает, что галактики в скоплениях образуются из редких пиков над некоторым глобальным порогом первичного поля плотности. Однако обоснованность этого объяснения в случае гауссовских полей плотности недавно критиковалась в работе Gabrielli et al. (2000a). Они показали, что возрастающая разбросанность пиков, превышающих порог в гауссовских случайных полях, не объясняет наблюдаемое увеличение амплитуды корреляционной ξ -функции.

Другие альтернативные возможности, вроде локальных неоднородностей, коррекций за экстинкцию в Галактике и разделения по светимостям (Davis et al., 1988) выглядят неубедительно и требуют более тщательных исследований в будущем для значительно более крупных выборок галактик.

5.1.3. Решение Пиетронеро загадки r_0

Совершенно новую интерпретацию наблюдаемого поведения ξ -функции нашел Pietronero (1987) в рамках фрактального подхода к галактическому распределению. В этой классической статье он ввел метод Γ -функции для анализа пространственных галактических карт и вывел соотношение между Γ - и ξ -функциями, рассмотренное нами в разделе 3.4.

Для сферической (или кубической) выборки галактик с глубиной R_s и фиксированной светимостью галактик Pietronero (1987) получил для характерного масштаба r_0 , определяемого как $\xi(r_0)$

= 1, соотношение

$$r_0 = \left(\frac{3 - \gamma}{6} \right)^{1/\gamma} R_s. \quad (149)$$

Отсюда в рамках фрактальной модели ожидается линейная зависимость r_0 от R_s . Важным следствием уравнения (149) является то, что возрастающая амплитуда ξ -функции и соответствующий рост r_0 для выборок с большим R_s вызывается не большей длиной корреляции, а является просто искусственным эффектом, обусловленным самим определением редуцированной корреляционной функции. На рис. 3 в статье Pietronero (1987) было ясно показано, что причиной возрастающей амплитуды ξ -функции является возрастающая глубина выборки в пределах фрактальной структуры.

Если картина универсального фрактального распределения галактик верна, то метод Γ -функции, соответствующий фрактальным структурам, выявит степенное поведение для будущих, еще более глубоких выборок галактик. Требование сферической геометрии выборки является самым важным ограничением для глубоких галактических обзоров.

Первый анализ каталога галактических красных смещений CfA с помощью метода Γ -функции выполнили Coleman et al. (1988). Они получили степенную Γ -функцию с $\gamma = 1.5 \pm 0.2$ для выборок, полных по объему, с $N_{gal} = 266$ и 442. Фрактальное поведение было обнаружено в диапазоне масштабов от $1h_{100}^{-1}$ Мпк до $20h_{100}^{-1}$ Мпк без какого-либо характерного масштаба, в отличие от масштаба однородности $r_0 = 5h_{100}^{-1}$ Мпк, полученного методом ξ -функции.

5.1.4. Ячеистая фрактальная структура Вселенной

Всего через несколько месяцев после статьи Pietronero (1987) фрактальная интерпретация зависимости “корреляционной длины” от глубины была применена к данным по красным смещениям Calzetti et al. (1987). Было подтверждено линейное соотношение между r_0 и R_s при изменении глубины от $5h_{100}^{-1}$ Мпк до $50h_{100}^{-1}$ Мпк.

Затем в серии статей группы под руководством Руффини была разработана ячеистая модель фридмановской вселенной, в которой в пределах ячеек размером около 100 Мпк распределение галактик имеет фрактальную размерность $D \approx 1.2$, а на более крупных масштабах вселенная становится однородной (Ruffini et al., 1988; Calzetti et al., 1988, 1989). Их основной вывод состоял в том, что закон плотности де Вокулера можно согласовать с однородной фридмановской моделью, если

существует максимальный масштаб фрактальности.

Модель Руффини и его группы основана на предположении, что существуют массивные частицы темного вещества, называемые “ино”, которые подчиняются статистике Ферми и отвечают за начальные флуктуации плотности при образовании ячеистой структуры. Характерная величина энергии массы покоя “ино” равна $0.4 \div 10 \text{ эВ}$, а соответствующий параметр плотности равен $\Omega_{inos} = (0.4 \div 1)$. Ожидаемый размер фрактальной ячейки равен приблизительно 100 Мпк, что определяется джинсовской длиной в эпоху, когда частицы “ино” отделились от вещества. Угловой масштаб соответствующих флуктуаций космического микроволнового фонового излучения составляет около 1 градуса.

Однако они использовали заниженную величину фрактальной размерности $D \approx 1.2$, полученную из анализа ξ -функции, которая является искаженным значением истинной фрактальной размерности $D \approx 2$, получаемой с помощью подходящего метода Γ -функции. Любопытно было бы пересмотреть их модель для $D \approx 2$.

5.1.5. Ошибочное введение мультифрактальности из-за оценки $D_2 = 1.2$, полученной методом ξ -функции

Почти в то же самое время еще одна группа астрономов начала применять фрактальный подход для описания галактического распределения. Однако теперь видно, что на их работу повлияла искаженная оценка корреляционной фрактальной размерности, полученная методом ξ -функции.

Jones et al. (1988) и Martinez & Jones (1990) отмечают, что при применении методов подсчета покрытий и минимального связывающего дерева для определения хаусдорфовой размерности D_H обзора красных смещений CfA было получено значение $D_H = 2.1 \pm 0.1$. Однако на основе анализа ξ -функции для тех же каталогов галактик авторы пришли к выводу, что полученная ими корреляционная размерность $D_2 = 1.2$ отличается от значения хаусдорфовой размерности, следовательно, “Вселенная не является простым фракталом. Это более сложная структура — мультифрактал” (Martinez & Jones, 1990). Аналогичный вывод был сделан в работах Klypin et al. (1989) и Balian & Schaeffer (1989).

Здесь мы имеем пример того, как неадекватные методы анализа данных могут привести к ошибочным теоретическим выводам. Действительно, как обсуждалось в разделе 3.4, оценка фрактальной размерности по корреляционной ξ -функции как $D_2^\xi = 3 - \gamma_\xi$ на масштабах, близких к r_0 , дает иска-

женное значение истинной фрактальной размерности D_2 , поскольку здесь $\gamma_\xi(r = r_0) \approx 2\gamma$. Следовательно, чтобы вычислить истинное значение корреляционной размерности по наклону ξ -функции возле $r = r_0$, нужно учитывать это искажение, так что $D_2 = 3 - \gamma = 3 - (\gamma_\xi(r = r_0)/2) = 2.1$ для наблюдаемого наклона $\gamma_\xi(r = r_0) = 1.8$.

Поэтому можно сделать вывод, что в действительности $D_2 \approx D_H$, т.е. корреляционная размерность согласуется с хаусдорфовой размерностью для каталога CfA и нет необходимости в мультифрактальности, основанной на разнице между этими размерностями. Современные результаты анализа Γ -функции для CfA, 2dF, SDSS и других обзоров красных смещений подтверждают величину корреляционной размерности $D_2 \approx 2$ и, значит, устраняют необходимость мультифрактальности подобного рода (см. раздел 5.3).

5.1.6. Конференция 1987 года в Балатонфюреде и наблюдательные свидетельства очень больших структур

Параллельно с развитием статистических методов анализа фрактального распределения галактик в 1980-е годы появились новые наблюдательные доказательства, подтверждающие существование галактических структур с размерами, намного превосходящими характерный масштаб однородности r_0 , полученный из анализа ξ -функции.

Результаты десятилетия активных исследований после Таллиннской конференции 1977 года обсуждались на 130-ом Симпозиуме МАС “Крупномасштабные структуры Вселенной”, который состоялся в 1987 году в Балатонфюреде, Венгрия. Случилось так, что этот симпозиум стал последним симпозиумом по космологии для Якова Зельдовича (1914-1987) и одного из его талантливых учеников Виктория Шварцмана (1945-1987), который только начал исследование крупномасштабной структуры Вселенной в Специальной астрофизической обсерватории (САО) Академии наук СССР.

На конференции Балатонфюред-87 были представлены новые наблюдательные данные по реальности галактических структур размером около 100 Мпк. В статье Nuchra et al. (1988) обсуждалось расширение обзора красных смещений CfA, который на несколько лет стал основным испытательным стендом для различных статистических методов анализа распределения галактик. Был сделан вывод, что пустые области (войды) и волокна являются характерными для наблюдаемого распределения галактик, а размер войдов достигает $50h_{100}^{-1}$ Мпк, что намного больше, чем характеристический масштаб ξ -функции $r_0 \approx 5h_{100}^{-1}$ Мпк.

Karachentsev & Kopylov (1988) сообщили о результатах спектрального обзора 245-ти галактик с $m_B \leq 17.5$ в узкой полосе, проходящей через скопление Coma. Они подтвердили наличие неоднородных структур в пределах сверхскопления Coma и оценили параметры корреляционной ξ -функции: $r_0 = 22h_{100}^{-1}$ Мпк и $\gamma = 1.5$. Было получено, что средний размер 14 войдов составляет примерно $25h_{100}^{-1}$ Мпк.

Самые выдающиеся структуры были открыты при изучении богатых скоплений галактик. В статьях Tully (1986, 1987) было проанализировано распределение 47-ми эйбловских скоплений в пределах области до $z = 0.1$ и обнаружена плоская структура размером приблизительно $300h_{100}^{-1}$ Мпк. Она называется комплексом сверхскоплений Pisces-Cetus.

Похожие результаты для еще более глубокого обзора скоплений галактик были получены Korylov et al. (1988). Авторы представили первый результат программы “Северный конус Метгалактики”, которая включала измерения красных смещений до $z = 0.28$ для 58-ми богатых компактных скоплений галактик в пределах конуса с $b^{\text{II}} > 60^\circ$. По этим данным они сделали предварительное заключение о существовании неоднородностей в распределении галактик на масштабах до $500h_{100}^{-1}$ Мпк.

В резюме конференции, которое сделал Peebles (1988), можно прочитать: “Существуют важные доказательства в пользу структур на масштабах $\geq 50h_{100}^{-1}$ Мпк, но я думаю, что честно будет повторить старые вопросы: не может ли это быть артефактом ошибок в каталогах? Не может ли глаз выбирать узоры из шума? Если бы ответы были решительным “нет”, это было бы очень разрушительно для масштабноинвариантного холодного темного вещества. Мы все будем с большим интересом следить за этим спором”.

На выявление реальности таких сверхкрупных структур во Вселенной ушло больше десяти лет напряженной наблюдательной работы, но спор о том, насколько это действительно разрушительно для моделей холодного темного вещества, все еще продолжается.

5.2. Дальнейшие этапы дебатов

После того, как в изучении крупномасштабного распределения галактик появилась новая идея — представление о фрактальности, был период сильной оппозиции со стороны тех, кто использовал старый метод корреляционного анализа. К счастью, в науке столкновение идей действительно необходимо для более глубокого понимания Все-

ленной. Так было и в случае фрактального распределения галактик, которое было альтернативой однородного распределения вещества во Вселенной.

5.2.1. Принстонские “Диалоги 96”: аргументы Дэвиса в пользу однородности на масштабах, превосходящих $20h_{100}^{-1}$ Мпк

В 1996 году в Принстоне состоялась международная астрономическая конференция под интригующим названием “Критические диалоги в космологии”. Примечательно, что первой темой, которая открывала конференцию, был диалог между Марком Дэвисом и Лучиано Пиетронеро об однородности распределения галактик.

Davis (1997) отстаивал точку зрения, “что имеются многочисленные доказательства крупномасштабной однородности на масштабах, превышающих приблизительно $50h_{100}^{-1}$ Мпк с фрактальным распределением вещества на более мелких масштабах”. Он подчеркнул, что наблюдаемая корреляционная ξ -функция хорошо описывается степенным законом $\xi(r) \approx (r/r_0)^{-\gamma}$ при $r_0 \approx 5h_{100}^{-1}$ Мпк и $\gamma = 1.8$. Отсюда следует, что фрактальная размерность на масштабах $r < r_0$ равна $D = 1.2$.

Аргументы Дэвиса в пользу однородности:

D1. Изотропия космического микроволнового фонового излучения и подсчетов рентгеновских и радио источников.

D2. Наблюдаемые подсчеты галактик для диапазона зв. величин $14 < m < 18$ имеют наклон $0.6m$.

D3. Наблюдаемая угловая корреляционная функция $w(\theta)$ может быть использована для восстановления пространственной корреляционной функции $\xi(r)$.

D4. Анализ четырех полных по объему выборок из обзора красных смещений 1.2 Jy IRAS дает для $\xi(r)$ стандартные величины γ и r_0 , когда радиус, ограничивающий объем, растет от $60h_{100}^{-1}$ Мпк до $120h_{100}^{-1}$ Мпк.

D5. Конец роста размеров структур, вытекающий из обзора красных смещений $LCRS$.

D6. Облака $Ly-\alpha$, обнаруженные в спектрах поглощения квазаров, выглядят почти однородно распределенными в пространстве.

Обсудив эти аргументы, Дэвис пришел к выводу: “Измеренная двухточечная корреляционная функция галактик $\xi(r)$ является степенной на трех порядках масштабов и аппроксимирует фрактальное поведение, начиная с масштабов $0.01h_{100}^{-1}$ Мпк $< r < 10h_{100}^{-1}$ Мпк. Но на масштабах, превосходящих $\approx 20h_{100}^{-1}$ Мпк, фрактальная структура заканчивается, среднеквадратичная амплитуда флуктуации падает ниже единицы, и Вселенная приближается к однородности, что необходи-

мо для того, чтобы придать смысл FRW-вселенной (вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера)”.

5.2.2. Принстонские “Диалоги 96”: аргументы Пиетронеро в пользу фрактальности

Пиетронеро представил статистический метод (Γ -функция) адекватный для изучения фрактальных структур, сравнил его с методом ξ -функции и продемонстрировал первые результаты применения обоих методов к имеющимся каталогам красных смещений (Pietronero et al., 1997).

Главные аргументы Пиетронеро в пользу фрактальности распределения галактик:

P1. Эффект проекции пространственной фрактальной структуры может привести к наблюдаемой изотропии углового распределения астрофизических источников на небе.

P2. Эффект малого числа в подсчетах ярких галактик может привести к наблюдаемому закону $0.6m$ даже для фрактального распределения.

P3. Метод корреляционной ξ -функции дает искусственно искаженные значения и для фрактальной размерности D , и для масштаба однородности R_{hom} .

P4. Метод Γ -функции (условная плотность) подходит для оценки истинной величины фрактальной размерности D и для обнаружения перехода к однородности.

P5. Анализ Γ -функции имеющихся пространственных галактических каталогов CfA, PP, IRAS, LEDA, LCRS, ESP дает величину $D = 2.0 \pm 0.2$ для фрактальной размерности на масштабах до радиуса R_{max}^{sph} самой большой сферы, которую можно вписать в выборку.

P6. В существующих каталогах галактик масштаб однородности еще не достигнут. Он может составлять $150h_{100}^{-1}$ Мпк (результат LEDA) и даже достигать $1000h_{100}^{-1}$ Мпк (подсчеты числа галактик в обзоре красных смещений ESP).

Результаты анализа основных каталогов красных смещений галактик методом Γ -функции приведены в работе Sylos Labini et al. (1998). Первые подробные карты трехмерных распределений галактик в области Местного Сверхскопления приведены в работах Di Nella & Paturel (1994), Paturel & Di Nella (1995), Fairall (1998).

Обе дискутирующие стороны согласились, что распределение галактик является фрактальной структурой, по крайней мере, в пределах масштаба $0.1 \div 10h_{100}^{-1}$ Мпк. Но они разошлись во мнениях о величине фрактальной размерности (Дэвис за $D \approx 1.2$, а Пиетронеро за $D \approx 2$) и о величине масштаба однородности (Дэвис за $R_{hom} \approx 20h_{100}^{-1}$ Мпк, а Пиетронеро за $R_{hom} \geq 150h_{100}^{-1}$ Мпк). Пиетронеро также подчеркнул, что возможное существование

однородно распределенного темного вещества может примирить фридмановскую однородную модель с наблюдаемой видимой фрактальной структурой.

5.2.3. Проблема проекции фракталов на небесную сферу

Одним из самых многократно повторяемых аргументов в пользу фрактальной размерности $D = 1.2$ и однородности распределения галактик в пространстве на масштабах, превосходящих $r_0 = 5h_{100}^{-1}$ Мпк, было утверждение, что анализ каталогов углового положения галактик привел именно к таким значениям параметров угловой корреляционной функции.

Действительно, начиная с работы Totsuji & Kihara (1969), во всех каталогах угловых положений галактик астрономы находили универсальное поведение угловой корреляционной функции $w(\theta) = \xi_{ang}(\theta) \propto \theta^{-\alpha}$ с $\alpha \approx 0.8$. Для масштабов $r < r_0$ это соответствовало бы фрактальной размерности D в трехмерном пространстве $D = 2 - \alpha \approx 1.2$. Поскольку это меньше 2, то согласно теореме о проекции фракталов (раздел 2.4.5), можно оценить истинную фрактальную размерность по проекции распределения галактик на небесную сферу.

К сожалению, у этой логики есть изъян. Действительно, если реальное пространственное распределение галактик является фрактальной структурой с $D \geq 2$, мы не смогли бы обнаружить ее по наблюдениям углового распределения галактик. Это происходит потому, что согласно этой же теореме о проекции фракталов, результатом проекции такой структуры на небо будет распределение, близкое к однородной поверхностной плотности. Поэтому для обнаружения фрактальных структур с $D \geq 2$ обязательно нужны пространственные карты.

Примечательно, что фрактальный анализ современных обширных пространственных карт распределения галактик выявил $D \approx 2.2$, поместив фрактальную размерность как раз в этот критический интервал.

После статьи Baryshev (1981), где было отмечено возможное наличие “скрытых” структур с $D \geq 2$, появились подробные исследования сложной проблемы угловых проекций фракталов (Dogterom & Pietronero, 1991; Coleman & Pietronero, 1992; Durer et al., 1997; Montuori & Sylos Labini, 1997; Eckmann et al., 2004).

Метод угловой Г-функции. Согласно наблюдаемых угловых и пространственных Г-функций с фрактальными структурами, имеющими $D \approx 2$, лучше всего было продемонстрировано в работе

Montuori & Sylos Labini (1997). Авторы исследовали пространственные карты вместе с соответствующими угловыми распределениями по нескольким каталогам красных смещений: CfA1, SSRS1, Perseus-Pisces, яркие галактики APM и галактики Цвики. Чтобы не исказить оценку корреляционного показателя степени в угловых данных, они использовали условную поверхностную плотность Γ_{ang}

$$\Gamma_{ang}(\theta) = \frac{1}{S(\theta)} \frac{dN(\theta)}{d\theta} = \frac{B_{ang}D}{2\pi} \theta^{-\alpha}, \quad (150)$$

где $S(\theta)d\theta$ — элемент телесного угла (для малых углов $\theta \ll 1$ аппроксимируется как $S(\theta) \approx 2\pi\theta$), $N(\theta) = B_{ang}\theta^D$ — число галактик в элементе сферы с радиусом θ , D — фрактальная размерность трехмерной структуры, которая при условии $0 \leq D < 2$ совпадает с фрактальной размерностью D_{pr} — спроектированной структуры (см. раздел 2.4.5), α — показатель степени угловой корреляции, связанный с фрактальной размерностью D как

$$\alpha = 2 - D = \gamma - 1. \quad (151)$$

Последнее равенство вытекает из соотношения между пространственной и угловой Г-функциями. Первая является обычной трехмерной Г-функцией $\Gamma(r) \propto r^{-\gamma}$ с $\gamma = 3 - D$, а вторая есть угловая Г-функция $\Gamma_{ang} \propto \theta^{-\alpha}$ с $\alpha = 2 - D$.

Результат анализа угловой и пространственной Г-функций ясно продемонстрировал, что фрактальная размерность наблюдаемой трехмерной структуры

$$D = 1.9 \pm 0.1, \quad (152)$$

что было выведено из независимого анализа каталогов угловых положений и пространственных карт. Показатель степени угловой корреляции был равен $\alpha = 0.1 \pm 0.1$, а показатель степени пространственной корреляции был равен $\gamma = 1.1 \pm 0.1$ для всех упомянутых выше каталогов красных смещений.

Самым удивительным является тот факт, что ранее выведенное “универсальное” значение показателя степени угловой корреляции $\alpha_w = 0.8$ — искусственный эффект, вызванный использованием метода угловой корреляционной ξ -функции $w(\theta)$. Это связано с тем, что редуцированная корреляционная функция дает систематическое искажение значения истинного показателя степени корреляции из-за условия нормировки (раздел 4.4).

Здесь мы снова видим, что вся история о том, как найти истинный показатель степени корреляции, вертится вокруг разницы между степенным поведением полной корреляционной функции и соответствующим нестепенным поведением редуцированной корреляционной функции. Это происхо-

дит и для углового, и для пространственного распределения.

5.2.4. Современные научные вопросы, связанные с крупномасштабной фрактальностью

Дебаты о природе крупномасштабной структуры видимого вещества во Вселенной вдохновили многих астрономов и физиков на изучение различных аспектов фрактального распределения галактик. Спектр обсуждаемых тем очень широк и показывает, что принципиальные задачи, уже поднятые Эйнштейном (Einstein, 1917, 1922) и Селети (Seleuty, 1922, 1923), о свойствах иерархических космологических моделей теперь тщательно исследуются и фактически приводят к образованию новых направлений в космологической физике.

В табл. 3 представлен список основных тем исследований вместе с соответствующими ссылками, что показывает разнообразие космологических аспектов, затронутых фрактальностью крупномасштабной структуры Вселенной. Некоторые результаты этих исследований мы обсудим в разделе 6.

5.3. Недавние результаты, полученные с помощью анализа ξ - и Γ -функций

Как обсуждалось выше, критическими параметрами для корреляционного анализа распределения галактик являются: 1) среднее расстояние между ближайшими соседними галактиками R_{sep} , 2) радиус максимальной сферы, которая полностью помещается в выборке R_{sph}^{max} , 3) интервал абсолютных звездных величин ΔM_i выбранных галактик, и 4) число галактик N_{gal} в выборке, ограниченной по объему. Чтобы извлечь надежную информацию о показателе степени корреляции и масштабе однородности, необходимо знать ограничения метода, используемого для оценки. Мы увидим, что в пределах общего интервала применимости анализ и ξ -, и Γ -функций дает согласующиеся результаты.

5.3.1. ξ - и Γ -функции в пространстве красных смещений

Анализ ξ - и Γ -функций обзора 2dF. Завершающий выпуск обзора красных смещений галактик 2dF (Colless et al., 2001, 2003) открывает новые возможности для выполнения разных типов статистического анализа больших выборок галактик.

В обзоре красных смещений 2dF содержится около 220 000 галактик в двух (NGP и SGP) узких полосах приблизительно $90^\circ \times 15^\circ$ (SGP) и $75^\circ \times 10^\circ$ (NGP) полных до $b_j = 19.5$ с эффективным красным смещением $z_s \approx 0.15$ и эффективной абсолютной зв. величиной $M_s - 5 \log h_{100} \approx -20.0$, соответ-

ствующей светимости $L_s \approx 1.4L_*$ (Norberg et al., 2002).

Эти данные были проанализированы с помощью метода редуцированной корреляционной ξ -функции в статье Hawkins et al. (2003). Корреляционная функция в пространстве красных смещений была аппроксимирована двумя разными степенными законами (рис. 5, 6, 7 в их статье). Во-первых, как

$$\xi_z(s) = \left(\frac{13 h_{100}^{-1} \text{Mpc}}{s} \right)^{0.75}, \quad (153)$$

для интервала масштабов $0.1 < s < 3h_{100}^{-1}$ Мпк. А во-вторых, как

$$\xi_z(s) = \left(\frac{6.82 h_{100}^{-1} \text{Mpc}}{s} \right)^{1.57} \quad (154)$$

на масштабах $3 < s < 20h_{100}^{-1}$ Мпк. Для больших масштабов ($30 \div 60h_{100}^{-1}$ Мпк) функция $\xi_z(s)$ становится отрицательной.

Подобное поведение корреляционной ξ -функции согласуется с уравнением (85). Это означает, что распределение галактик 2dF в пределах диапазона масштабов $0.1 < s < 3h_{100}^{-1}$ Мпк можно считать фрактальной структурой с размерностью $D = 3 - \gamma = 2.25$. Для масштабов $s > 3$ Мпк ξ -функция непрерывно меняет наклон, а на масштабе $r_0 \approx 5h_{100}^{-1}$ Мпк показатель степени становится равным $\gamma_{r_0} = 2\gamma = 1.5$, что прекрасно согласуется с уравнением (87). В статье Hawkins et al. (2003, рис.7) было найдено, что выборка 2dF имеет $\xi_z(s)$ -функцию, аналогичную другим большим обзорам с геометрией в виде тонкого среза — Las Campanas и SDSS.

Метод Γ -функции был применен к полным по объему выборкам 2dF в работах Vasiliev (2004) и Vasiliev et al. (2005), где было получено, что условная плотность для данных 2dF имеет степенной вид с фрактальной размерностью $D = 2.2 \pm 0.2$ на масштабах $0.5 < s < 40h_{100}^{-1}$ Мпк. Величина фрактальной размерности $D = 2.2 \pm 0.2$ согласуется с результатами, полученными Sylos Labini, Montuori & Pietronero (1998) для всех каталогов красных смещений галактик, имевшихся в конце 1990-ых годов: CfA, Perseus-Pisces, SSRS, IRAS, APM-Stromlo, LEDA, Las Campanas, ESP. Анализ методом Γ -функции таков, что проверяемые масштабы ограничены радиусом максимальной сферы R_{sph}^{max} , полностью погруженной в геометрию каталога, т.е. примерно $20h_{100}^{-1}$ Мпк для существовавших обзоров в виде тонкого среза и $100h_{100}^{-1}$ Мпк для выборки LEDA.

SDSS: результаты ξ - и Γ^ -анализа.* Слоановский обзор после его завершения будет иметь миллионы красных смещений галактик и широкое по-

крытие неба (приблизительно π стерадиан) и будет идеальным каталогом для окончательного разрешения продолжающегося спора о фракталах. Однако к настоящему времени были сделаны только узкие срезы ($2.5^\circ \div 5^\circ$), подобные 2dFGRS, которые опубликованы как каталоги EDR, DR1 и DR2 (см. веб-сайт SDSS).

В работе Zehavi et al. (2002) был выполнен анализ корреляционной ξ -функции выборки 29300 галактик SDSS с лучевыми скоростями $5700 < cz < 39000$ км/с в диапазоне абсолютных зв. величин $-22 + 5 \log h_{100} < M_r < -19 + 5 \log h_{100}$. Корреляционная ξ -функция в пространстве красных смещений этой SDSS-выборки имеет явно нестепенной вид (см. рис. 5 в этой статье). Авторы взяли диапазон масштабов $2 < s < 8h_{100}^{-1}$ Мпк, в котором аппроксимировали ξ -функцию степенным законом $\xi_z(s) = (s/8.0h_{100}^{-1} \text{ Мпк})^{-1.2}$. Однако из того же рис. 5 ясно, что функция $\xi_z(s)$ имеет три характерных масштаба: 1) для диапазона $0.1 < s < 0.5h_{100}^{-1}$ Мпк показатель степени $\gamma \approx 1.8$, 2) для диапазона $0.5 < s < 5h_{100}^{-1}$ Мпк показатель степени $\gamma \approx 1$ и 3) для диапазона $5 < s < 30h_{100}^{-1}$ Мпк показатель степени $\gamma \approx 1.8$. Как обсуждалось в разделе 3.4, именно такое поведение корреляционной ξ -функции ожидается для фрактальной структуры, если учитывать характерные масштабы R_{sep} , r_0 , R_{max}^{sph} .

Первый Γ^* -анализ выборки ярких красных галактик (Luminous Red Galaxies — LRG) SDSS был недавно представлен в работе Hogg et al. (2004) и обсуждался также Jouse et al. (2005). LRG-выборка так глубока (среднее z составляет примерно 0.3), что радиус максимальной сферы достигает величины $R_{max}^{sph} \approx 100h_{100}^{-1}$ Мпк. Для выборки с $N_{gal} = 3658$ Hogg et al. (2004) обнаружили, что $\Gamma^*(r)$ имеет степенной вид, соответствующий фрактальной размерности $D \approx 2$ для диапазона масштабов $1 \div 25h_{100}^{-1}$ Мпк. Для масштабов $25 \div 70h_{100}^{-1}$ Мпк существует отклонение от степенного закона, а на масштабах $70 \div 100h_{100}^{-1}$ Мпк функция Γ^* достигает постоянного значения. Это было интерпретировано как обнаружение масштаба однородности $R_{hom} \approx 70h_{100}^{-1}$ Мпк для LRG-галактик SDSS.

Следует отметить, что в обзорах в виде тонкого среза, подобных рассмотренной выборке LRG, искусственное появление однородности возможно, начиная с масштабов примерно $0.25R_{max}^{sph}$ когда независимые сферы в поперечном направлении нельзя полностью погрузить в объем выборки. Поэтому в будущем указанное обнаружение однородности следует пересмотреть для более крупных сферических объемов.

Результаты Γ -анализа других каталогов. В работах Tikhonov et al. (2000) и Tikhonov & Makarov (2003) приводятся результаты обработ-

ки методом Γ -функции нескольких выборок галактик. Была найдена фрактальная размерность $D \approx 2$ на масштабах от 1 до 30 Мпк.

5.3.2. Проблема поля пекулярных скоростей

Результаты корреляционного анализа данных 2dF и SDSS показывают, что распределение галактик, по крайней мере, в диапазоне масштабов $0.1 \div 20h_{100}^{-1}$ Мпк совместимы с фрактальным распределением, имеющим размерность $D \approx 2.2$.

Как обсуждалось в разделе 3, восстановление корреляционной ξ -функции в реальном пространстве по наблюдаемой функции $\xi_z(s)$ в пространстве красных смещений включает процедуру проекции, которая определена только для структур с фрактальной размерностью $D < 2$ (т.е. $\gamma > 1$). Однако наблюдаемая величина фрактальной размерности, например, для галактик 2dF, равна $D = 2.25$ ($\gamma_s = 0.75$), что нарушает необходимое условие для восстановления корреляционной функции в реальном пространстве. Следовательно, результаты работ, основанных на процедуре проекции, нужно пересмотреть, используя методы восстановления, не опирающиеся на процедуру проекции.

Игнорируя проблему проекции и используя стандартную процедуру восстановления ξ -функции реального пространства для данных 2dF (Hawkins et al., 2003) и для данных SDSS (Zehavi et al., 2002), вышеуказанные авторы нашли, что восстановленная пространственная корреляционная ξ -функция имеет “канонический” наклон $\gamma \approx 1.7$ и единичный масштаб $r_0 \approx (5 \div 6)h_{100}^{-1}$ Мпк для диапазона расстояний $0.1 < r < 15h_{100}^{-1}$ Мпк. Выведенная характерная дисперсия парных скоростей равна $\sigma_v = 500 \div 600$ км/с. Она медленно убывает с ростом расстояния в диапазоне $0.1 \div 10h_{100}^{-1}$ Мпк.

Хотя влияние пекулярных скоростей приводит к некоторому искажению корреляционной функции, которую нужно исследовать подходящими методами, существуют наблюдательные свидетельства, что величина искажения на масштабах $1 \div 10$ Мпк может быть мала из-за малой реально наблюдаемой дисперсии скоростей $\sigma_v < 100$ км/с в локальном хаббловском потоке (Sandage, 1999; Ekholm et al., 2001; Karachentsev et al., 2002; 2003a,b; Whiting, 2003). Этот результат противоречит намного большему значению дисперсии скоростей, полученному из анализа ξ -функции.

Сравнение этих результатов с моделированием N тел в хаббловском объеме в рамках модели Λ CDM a priori ограничено неизвестным произвольным коэффициентом байеса между моделируемым полем плотности (и скорости) холод-

ного небарионного темного вещества и реальным барионным распределением ярких галактик. Теория образования крупномасштабной структуры пока не может предсказывать величину баяса как функцию масштаба, $b(r)$, поэтому всегда можно выбрать эту функцию так, чтобы модельное распределение совпало с любым наблюдаемым распределением галактик.

5.3.3. Проблема зависимости r_0 от R_s , L , \bar{d} и типа галактики

Прежде всего, как уже обсуждалось в разделе 3, единичный масштаб r_0 не является истинной характеристикой кластеризации галактик, а содержит искусственные искажения, обусловленные индивидуальными свойствами геометрии выборки и полным числом галактик. Следовательно, изучение соотношения между r_0 и другими физическими параметрами выборки галактик является некорректным подходом к анализу свойств кластеризации.

Во-вторых, в методе проектирования корреляционной ξ -функции, применяемом многими группами (Norberg et al., 2001; 2002; Hawkins et al., 2003; Madgwick et al., 2003; Zehavi et al., 2004a,b) для получения значения “корреляционной длины” в реальном пространстве r_0 , использовалась процедура, которая исключает фрактальные структуры с $D \geq 2$.

Следовательно, наблюдаемые соотношения между r_0 и R_s , L , \bar{d} и типом галактики (Martinez et al., 2001; Norberg et al., 2001; 2002; Hawkins, 2003; Madgwick et al., 2003; Zehavi et al., 2004a,b) представляют смесь искусственных и реальных эффектов, которые трудно разделить.

Подходящим методом для изучения корреляционных свойств фрактального распределения галактик является зависимость фрактальной размерности от светимости или типа галактик, ожидаемая для мультифрактальных структур (Pietronero, 1987; Sylos Labini & Pietronero, 1996; Gabrielli et al., 2004b). Главными проблемами таких исследований является малый телесный угол в галактических каталогах в виде тонкого среза и малое число галактик в узком интервале абсолютных звездных величин. Важно, чтобы рассматривались диапазоны расстояний, определенные по характерным масштабам выборок (раздел 3.4.3).

5.3.4. Спектр мощности и сечение фракталов

В разделе 3.7 рассматривался спектр мощности как метод анализа распределения галактик. В ка-

честве примеров его применения к реальным данным рассмотрим выборки CfA и SDSS.

Обзор красных смещений CfA. Спектр мощности обзора красных смещений CfA обсуждался в работе Park et al. (1994). Авторы выделили четыре ограниченных по объему выборки, примерно с тысячей галактик в каждой, с глубинами 60, 78, 101 и $130h_{100}^{-1}$ Мпк.

Спектр мощности хорошо описывается двумя степенным законами: 1) на масштабах $5 \div 30h_{100}^{-1}$ Мпк $P(k) \propto k^{-2.1}$, 2) на масштабах $30 \div 120h_{100}^{-1}$ Мпк $P(k) \propto k^{-1.1}$. Поскольку радиус максимальной сферы равен примерно $30h_{100}^{-1}$ Мпк, это означает, что наблюдаемое поведение $P(k)$ в первом интервале масштабов согласуется с фрактальной структурой размерности $D = 2.1$. Во втором интервале масштабов (до $r = 120h_{100}^{-1}$ Мпк), где $r > R_{max}^{sph}$ обзор эффективно становится двумерным, согласно теореме о сечении фракталов (раздел 2.4.5), ожидаемая фрактальная размерность сечения должна равняться $D_{int} = D - 1 = 1.1$, что как раз и наблюдается.

Обзор красных смещений SDSS. Трехмерный спектр мощности нескольких полных по объему выборок из ранних данных обзора красных смещений SDSS был проанализирован Tegmark et al. (2004). На их рисунке 22 представлен декоррелированный спектр мощности в реальном пространстве. И опять можно представить спектр мощности двумя степенными законами: 1) на масштабах $10 \div 60h_{100}^{-1}$ Мпк спектр $P(k) \propto k^{-2}$, 2) на масштабах $60 \div 200h_{100}^{-1}$ Мпк спектр $P(k) \propto k^{-1}$. Снова, как и в случае с CfA, это согласуется с фрактальной структурой, имеющей фрактальную размерность $D \approx 2$ на всех рассматриваемых масштабах. Такое же поведение спектра мощности $P(k)$ было обнаружено для выборки 2dFGRS (Tegmark et al., 2002).

5.4. Другие результаты фрактального подхода

5.4.1. Двухточечная условная лучевая плотность

В разделе 3.6 был рассмотрен новый метод фрактального подхода, основанный на вычислении плотности вероятности найти частицу на луче зрения при условии, что этот луч ограничен с концов двумя точками структуры. Этот метод позволяет расширить фрактальный анализ обзора с геометрией в виде тонкого среза до глубины обзора R_s .

Анализ галактик LEDA и SDSS (Baryshev & Bukhmastova, 2004) и полных по объему выборок 2dF (Vasiliev, 2004; Vasiliev et al., 2005) методом двухточечной условной лучевой плотности су-

щественно расширил диапазон исследуемых масштабов от $20h_{100}^{-1}$ Мпк (достигаемых методом Г-функции) до примерно $100 h_{100}^{-1}$ Мпк. Результат анализа состоит в том, что фрактальная размерность равна $D \approx 2.2$ для всего интервала исследуемых масштабов.

5.4.2. Подсчеты ярких галактик всего неба LEDA для всего неба

Зависимость числа галактик от видимой звездной величины имеет два важных приложения в космологии. Особенно в эпоху каталогов угловых положений галактик такие подсчеты считались сильным аргументом в пользу однородности распределения галактик. Кроме того, локальные подсчеты служат опорной точкой для более глубоких подсчетов. Здесь мы приводим современные результаты подсчетов ярких галактик на основе базы данных LEDA по всему небу.

Лионская база внегалактических данных (LEDA), созданная Жоржем Патюрелем в 1983 году, является продолжением Опорного каталога де Вокулера и его более поздних изданий. Фактически, Третий Опорный Каталог уже был основан на данных LEDA (de Vaucouleurs et al., 1991). В настоящее время база внегалактических данных LEDA предлагает каталог однородных параметров галактик для самой крупной существующей выборки всего неба. В нем среди более миллиона галактик имеется около 50 000 ярких галактик с измеренной зв. величиной В ярче 16-ой.

Выборка LEDA была создана слиянием всех существующих каталогов и непрерывно пополняется потоком новых данных. Многие годы ее полнота исследовалась с помощью подсчетов (Paturel et al., 1994; 1997; Couitois et al., 2004; Gabrielli et al., 2004b). Одновременно с полнотой эти данные дают информацию о наклоне яркого конца подсчетов галактик, а значит, о законе пространственного распределения.

Недавно Teerikorpi (2004), в связи с изучением влияния эддингтоновского смещения на подсчеты, исследовал подсчеты галактик LEDA в диапазоне звездных величин В $10 \div 16$. Из LEDA были выбраны все галактики, имеющие полную зв. величину В, заданное σ и галактическую широту $|b| > 25^\circ$. Анализ подсчетов показывает наклон 0.44 в диапазоне звездных величин $B = 10 \div 16$, что соответствует фрактальной размерности $D = 2.2$ до масштабов около $100h_{100}^{-1}$ Мпк.

Похожие результаты были получены в работе Courtois et al. (2004), в которой была вычислена линия регрессии до $B = 16$ для несколько отличающейся выборки LEDA и получен наклон подсчетов, равный примерно 0.5.

5.4.3. Радиальные подсчеты галактик выборки KLUN

При обычных исследованиях крупномасштабной структуры в качестве индикатора расстояния используется красное смещение. Однако можно применять другие методы измерения расстояний, такие как соотношения Талли-Фишера и Фабера-Джексона. Teerikorpi et al. (1998) получили радиальное пространственное распределение галактик вокруг нашей Галактики, используя более чем 5000 модулей расстояния Талли-Фишера программы KLUN. Первые результаты указали на уменьшение средней плотности, которое согласуется с фрактальной размерностью $D = 2.2 \pm 0.2$ в диапазоне расстояний $10 \div 100h_{100}^{-1}$ Мпк. Это можно считать новым независимым аргументом в пользу результатов, полученных методами условной плотности, основанными на расстояниях по красному смещению, которые тоже приводят к фрактальной размерности $D \approx 2$ в том же диапазоне масштабов (Sylos Labini et al., 1998).

Метод модулей расстояния отличается от обычных подсчетов до фиксированной видимой звездной величины тем, что модули расстояний Талли-Фишера зондируют распределение галактик с лучшим пространственным разрешением. Измерения видимых зв. величин дают очень плохую оценку расстояний, тогда как модули расстояний Талли-Фишера имеют ошибку около 0.5 зв. вел. Кроме того, в методе, разработанном Teerikorpi et al. (1998), учитывается неполнота выборки. Будет интересно применить этот метод в будущем к более крупной выборке KLUN+, содержащей 20000 галактик.

Выводы, основанные на современных локальных подсчетах. Приведенные результаты влекут за собой несколько важных выводов:

- в подсчетах ярких галактик отсутствует закон $0.6m$, и, следовательно, не существует однородности до $100h_{100}^{-1}$ Мпк;
- наблюдаемый закон $0.44m$ для ярких галактик LEDA и радиальные подсчеты галактик KLUN согласуются с фрактальной структурой, имеющей $D = 2.2$;
- необходимо пересмотреть нормировку глубоких подсчетов галактик.

Итак, во-первых, для галактик со зв. величиной ярче $B = 14$ нет наклона 0.6, т.е. нет однородности в распределении галактик до $100h_{100}^{-1}$ Мпк.

Во-вторых, наблюдаемые численные подсчеты $N(m) = 0.44m + const$ в LEDA, радиальное распределение $N(r) \propto r^{2.2}$ для выборки KLUN и условная плотность для основных каталогов красных смещений $\Gamma(r) \propto r^{-1}$ согласуются с фрактальным распределением галактик, имеющим $D = 2.2 \pm 0.2$.

В-третьих, отсутствие однородности на малых

масштабах влияет на оценку средней плотности числа и плотности светимости (Joyce & Sylos Labini, 2001). В случае однородности эти плотности постоянны, тогда как для фрактальной структуры они зависят от радиуса объема, в котором они вычисляются. Это означает, что нужно пересмотреть обычную нормировку глубоких подсчетов галактик, основанных на локальной однородности, приняв во внимание локальную радиальную неоднородность.

6. Почему фрактальность важна для космологии

Обнаружение фрактальной структуры в трехмерных обзорах галактик открывает новые перспективы для понимания происхождения и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной. Одним из самых важных нерешенных вопросов теоретической космологии является вопрос о том, как описать неаналитические фрактальные источники космологического гравитационного поля. Кроме того, нужно полнее изучить фрактальное поле скоростей и его эволюцию. Эта новая ситуация в космологии требует вернуться к тщательному анализу логики и структуры современных моделей мира.

6.1. Основные элементы космологических моделей

В основаниях современной космологии можно выделить следующие “краеугольные камни”:

- космологические принципы;
- фундаментальные физические теории;
- космологические наблюдательные данные.

Во всех этих частях космологии фрактальный подход играет существенную роль. Космологический принцип Эйнштейна расширился до космологического принципа Мандельброта. Фундаментальные физические теории включают новую фрактальную математику. Космологические наблюдения открыли масштабно-инвариантные свойства распределения галактик.

6.1.1. Три фундаментальных эмпирических закона в космологии

XX век стал свидетелем трех принципиальных шагов на пути ключевых открытий, давших три эмпирических космологических закона:

- линейный закон “красное смещение – расстояние”;
- тепловой закон космического микроволнового фонового излучения;
- фрактальный закон распределения галактик.

Для того, чтобы открыть внегалактическую Вселенную, а затем, в 1929 году, и закон Хаббла красных смещений (Lundmark, 1924; Hubble, 1929), необходим был прогресс астрономического приборостроения и спектроскопии. Развитие радиоастрономической техники привело в 1965 году к открытию теплового океана фотонов с температурой 3К (Penzias & Wilson, 1965). И наконец, как уже обсуждалось в этом обзоре, накопление тысяч галактических спектров с помощью специальных телескопов и применение соответствующих методов анализа выявило за последние двадцать лет фрактальность крупномасштабного распределения галактик (Sylos Labini et al., 1998).

6.1.2. Теоретические основы современной космологии

Для моделирования и понимания космологических явлений и для предсказания наблюдаемых астрофизических эффектов используются все четыре фундаментальных физических взаимодействия — сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное.

Но особую роль среди фундаментальных взаимодействий в космологии играет гравитация. Она проявляется как доминирующая сила во Вселенной, начиная с планетарных и звездных масштабов до космологических расстояний. Естественно, что теория гравитации является основой космологии. Она определяет крупномасштабную эволюцию вещества во Вселенной.

Кроме того, сама космологическая модель является частным решением уравнений гравитационного поля, и именно поэтому теория гравитации лежит в основе всего здания современной космологии (см. дискуссии в работах Feynman et al., 1995; Turner, 2002a,b; Peebles, 2002, 2003). Это также объясняет, почему к классическим космологическим тестам (Sandage, 1961; 1962; 1988; 1992; 1995a,b) следует добавить астрофизические проверки теорий гравитации (Baryshev, 2003).

6.1.3. Стандартная космологическая модель

В начале XXI века стандартной космологической моделью продолжает оставаться фридмановская (Friedmann, 1922, 1924) модель расширяющегося пространства. Она основана на общей теории относительности Эйнштейна и космологическом принципе однородности. Картина горячего Большого взрыва включает также процесс роста локальных неоднородностей, обусловленный гравитацией небарионного холодного темного вещества. В настоящую эпоху глобальная динамика вселенной определяется антигравитацией темной энер-

гии. Теперь считается, что “обычное” вещество” (звезды, газ, пыль), с которым космология имела дело большую часть прошлого века, составляет всего 0.5% от массы вселенной и, следовательно, не может влиять на ее расширение.

Уравнения гравитационного поля. Эйнштейновские уравнения общей теории относительности дают соотношение между геометрией пространства-времени и энергией-импульсом, содержащимся в веществе (мы используем обозначения из книги Landau & Lifshitz, 1971):

$$\mathfrak{R}_k^i - \frac{1}{2}g_k^i \mathfrak{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^i, \quad (155)$$

где \mathfrak{R}_k^i — тензор Риччи, g_{ik} — метрический тензор, а

$$T_k^i = \text{diag}(\varepsilon, -p, -p, -p) \quad (156)$$

есть полный тензор энергии-импульса космологической жидкости в сопутствующих координатах. Тензор энергии-импульса содержит два компонента: 1) обычное вещество с положительным давлением и 2) экзотическую субстанцию, называемую темной энергией, или квинтэссенцией, с отрицательным давлением.

Космологический принцип Эйнштейна. Космологический принцип однородности означает, что плотность и давление космической жидкости зависят только от космического времени:

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho(t), \quad (157)$$

$$p(\vec{r}, t) = p(t). \quad (158)$$

Полная плотность энергии $\varepsilon = \varrho c^2$ и давление p задаются суммой вышеуказанных компонент:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{de}, \quad p = p_m + p_{de}. \quad (159)$$

Здесь индекс “m” относится к различным видам обычного вещества (темного и светящегося) с положительным давлением и с уравнением состояния

$$p_m = \beta \varepsilon_m, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (160)$$

т.е. $\varepsilon_m = \varepsilon_{CDM} + \varepsilon_{\text{baryons}} + \varepsilon_{\text{rad}} + \varepsilon_\nu$. Индекс “de” (темная энергия/квинтэссенция) означает более экзотическую субстанцию с отрицательным давлением и с уравнением состояния

$$p_{de} = w \varepsilon_{de}, \quad -1 \leq w \leq 0. \quad (161)$$

Как частный случай ($w = -1$) оно включает космологическую константу Эйнштейна Λ , которую можно интерпретировать как космологиче-

ский вакуум. Квинтэссенция как новая космологическая идеальная жидкость с уравнением состояния (161) была предложена в работах Caldwell et al. (1998) и Zlatev et al. (1999) как решение космологической проблемы совпадений (Peebles & Ratra, 2003). Недавно значения $w < -1$ рассматривались также в уравнении состояния для так называемой “фантомной энергии” (Caldwell et al., 2003).

Уравнения Фридмана. Фридмановская модель является точным решением уравнений Эйнштейна (155). В предположении однородности (уравнения (157), (158)) линейный элемент Робертсона-Уолкера для однородного риманова пространства можно записать в виде:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S(t)^2 d\chi^2 - S(t)^2 I_k(\chi)^2, \quad d\omega^2, \quad (162)$$

где $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, χ , θ , ϕ — “сферические” сопутствующие пространственные координаты, t — координата синхронного времени, $I_k(\chi) = \sin(\chi)$, χ , $\text{sh}(\chi)$ соответствуют значениям константы кривизны $k=+1, 0, -1$ соответственно, а $S(t)$ является масштабным фактором.

В случае однородности уравнения Эйнштейна (155) прямо сводятся к уравнениям Фридмана, которые можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} S \left(\varrho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (163)$$

Из тождества Бианки следует уравнение непрерывности

$$\dot{\varrho} = -3 \left(\varrho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{S}}{S}, \quad (164)$$

которое нужно добавить к уравнению (163). Поскольку лагранжева сопутствующая координата χ не зависит от времени, можно переписать уравнение (163), используя определение собственного метрического расстояния $r = S(t)\chi$ как другой вид точного уравнения Фридмана:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_g(r)}{r^2}, \quad (165)$$

где гравитирующая масса $M_g(r)$ задается уравнением

$$M_g = M_m + M_r + M_v, \quad (166)$$

а вклады от вещества, излучения и вакуума равны

$$M_m(r) = \frac{4\pi}{3} \left(\varrho_m + \frac{3p_m}{c^2} \right) r^3, \quad (167)$$

$$M_r(r) = \frac{4\pi}{3} 2\varrho_r r^3, \quad (168)$$

$$M_v(r) = -\frac{4\pi}{3} 2\varrho_v r^3. \quad (169)$$

Решая уравнение Фридмана (165), находим зависимость от времени для метрического расстояния $r(t)$ или масштабного фактора $S(t)$. Классификация двухжидкостных фридмановских моделей с веществом и темной энергией дана в работе Gromov et al. (2004).

Космологические параметры. Модель Фридмана-Леметра-Робертсона-Уолкера (FLRW) имеет два главных параметра: параметр Хаббла $H = \dot{S}/S$ и параметр замедления $q = -\dot{S}\dot{S}/\dot{S}^2$, которые в настоящую эпоху t_0 равны $H(t_0) = H_0$ и $q(t_0) = q_0$ соответственно.

Часто также используется параметр плотности $\Omega = \rho/\rho_{cr}$, где критическая плотность равна

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (170)$$

Уравнение (165) можно также записать в виде:

$$q = \frac{1}{2}\Omega \left(1 + \frac{3p}{\rho c^2} \right), \quad (171)$$

где Ω, p, ρ являются суммарными величинами по всем компонентам, и

$$\Omega = 1 + \Omega_k \quad (172)$$

при $\Omega_k = kc^2/S^2H^2$.

Старая стандартная модель имеет следующие параметры:

$$\Omega_0 = \Omega_{(m)0} = 1, \quad \Omega_v = 0, \quad q_0 = 0.5. \quad (173)$$

Новая стандартная модель, принятая в настоящее время, имеет

$$\Omega_0 \approx 1, \quad \Omega_m \approx 0.3, \quad \Omega_v \approx 0.7, \quad q_0 \approx -0.6. \quad (174)$$

Это означает, что во фридмановской модели расширение нынешней вселенной ускоряется и что доминирующей силой во вселенной является космологическая антигравитация вакуума.

6.1.4. Фрактальные источники гравитационного поля

Результаты корректного статистического анализа пространственного распределения галактик выявили, что оно весьма неоднородно, по крайней мере, до масштабов около 100 Мпк. Это означает, что в современной космологии нужно рассматривать более общие модели, чем однородные фридмановские.

Космологический принцип Мандельброта. Глобальное соотношение “масса-радиус” $M(r)$ является основной характеристикой фрактального распределения вещества, которая определяет фрактальное поле плотности $\rho(r)$ как источник гравитационного поля.

В следующем разделе мы рассмотрим космологический принцип Мандельброта, который является обобщением космологического принципа Эйнштейна для случая неоднородных космологических моделей с изотропными фрактальными структурами и который можно записать как

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho(r, t), \quad (175)$$

$$p(\vec{r}, t) = p(r, t). \quad (176)$$

Здесь важно то, что переменная r является радиусом сферы вокруг каждой точки структуры (см. раздел 2.3).

Фрактальные модели основываются на решениях уравнений гравитационного поля с источниками, описываемыми фрактальным законом плотности.

Модель Леметра-Толмена-Бонди в общей теории относительности. Модели Леметра-Толмена-Бонди (ЛТВ) являются точными решениями уравнений Эйнштейна для 1) сферической симметрии, 2) вещества без давления (пыли), 3) движения без пересечения слоев. Эти модели, которые сначала изучали Леметр, Толмен и Бонди, являются самым простым обобщением моделей Фридмана-Робертсона-Уолкера (FRW) с ненулевым градиентом плотности (Bondi, 1947).

Модель ЛТВ использовалась для того, чтобы понять кинематику и динамику галактик вокруг индивидуальных концентраций массы. Например, Teerikorpi et al., (1992) и Ekholm et al. (1999) рассчитали ожидаемое движение галактик в сверхскоплении Virgo: 1) закон Хаббла на больших расстояниях, 2) замедление на меньших расстояниях, 3) поверхность нулевой скорости, 4) падение галактик на центр сверхскопления для еще меньших расстояний от наблюдателя.

Wonnor (1972) первым применил ЛТВ-модель к иерархической космологии. Он использовал закон плотности де Вокулера $\rho \sim r^{-\gamma}$ с $\gamma = 1.7$. В статьях Ribeiro (1992, 1993) был разработан численный метод для решения этой задачи. Новый подход к решению ЛТВ-уравнений для фрактального распределения галактик с крупномасштабным асимптотическим FRW-поведением был представлен в работе Gromov et al. (2001).

Однако применение ЛТВ-моделей к фрактальному распределению приводит к концептуальной проблеме, поскольку исходная формулировка ЛТВ содержала выделенную центральную точку вселенной, вокруг которой распределение плотности изотропно. При фрактальном распределении центра не существует, но каждый объект структуры можно считать локальным центром, являющимся ЛТВ-центром. Каждая точка структуры окружена сферически симметричным (в среднем) распреде-

лением вещества.

В этом смысле приложение ЛТВ-модели к фракталам означает, что существует бесконечное число ЛТВ-экземпляров с центрами в каждой точке структуры. Их начальные условия несколько различаются. Для каждого фиксированного масштаба средняя плотность приблизительно постоянна. Для различных масштабов плотность описывается степенным законом. Это исключает геоцентризм и позволяет использовать ЛТВ-модели как точную космологическую модель в ОТО, где расширение пространства становится масштабно-зависимым. Подобная проблема видимого центра существует даже для фридмановских моделей, в которых скорость расширения пространства в пределах расстояния r от фиксированной галактики определяется полной массой сферы вокруг этой галактики. Для фрактальных ЛТВ-моделей расширение пространства на расстоянии r от фиксированной точки фрактальной структуры также определяется средней массой сферы вокруг этой точки.

6.2. Происхождение и эволюция крупномасштабных фракталов: проблемы теоретических моделей

Наблюдаемая фрактальность крупномасштабного распределения галактик открывает новые аспекты процесса образования структур во Вселенной.

6.2.1. Закон Хаббла в пределах фрактального распределения галактик

Два фундаментальных эмпирических закона, установленных по внегалактическим данным, явно конфликтуют со стандартной космологической моделью.

Во-первых, существует степенное соотношение плотность-радиус (закон де Вокулера), соответствующее фрактальной структуре с размерностью $D \approx 2$ до масштабов примерно 100 Мпк. Во-вторых, цефеиды, индикаторы расстояния Талли-Фишера и сверхновые типа Ia подтверждают линейность хаббловского закона “красное смещение – расстояние” в пределах масштабов $1 \div 100 h_{100}^{-1}$ Мпк, т.е. именно там, где существует фрактальность.

Как отмечалось в разделах 4.3.3 и 5.3.2, в статье Sandage et al. (1972) впервые было отмечено противоречие между наблюдаемой линейностью закона Хаббла и возможным иерархическим распределением галактик. Авторы использовали существование локального закона Хаббла как аргумент против иерархической модели де Вокулера, основываясь на вычислениях соотношения “красное смещение – звездная величина”, выполненного

в работе Haggerty & Wertz (1972) для иерархических космологий.

Сильное отклонение от линейности, ожидаемое внутри фрактальной ячейки неоднородности, было подтверждено Fang et al. (1991). Другой аспект этой проблемы обсуждался в статьях Baryshev (1992, 1994) и Baryshev et al. (1998), где подчеркивалось, что наблюдаемое линейное соотношение “красное смещение – расстояние” внутри степенного фрактального распределения плотности создает проблемы, которые авторы назвали парадоксом Хаббла – де Вокулера, т.е. наблюдаемое сосуществование обоих эмпирических законов на одних и тех же масштабах (см. рис. 8). Есть несколько возможных решений этой проблемы.

Асимптотически однородные ЛТВ-модели. С помощью ЛТВ-модели Gromov et al. (2001) нашли необходимые условия для линейного закона Хаббла, существующего в пределах фрактальной структуры с размерностью $D = 2$. Чем больше масштаб неоднородности R_{hom} , тем меньше должен быть параметр плотности Ω_m . Например, для $R_{hom} = 100$ Мпк линейный закон Хаббла существует на расстояниях $r > 1$ Мпк, если параметр плотности $\Omega_m < 0.01$.

Открытая фридмановская модель. Joyce et al. (2000) предложили открытую фридмановскую модель, в которой убывающая плотность фрактальной компоненты вещества на расстоянии R_{hom} становится меньше плотности космического фонового излучения, играющего роль главной однородной компоненты вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера. Следовательно, параметр плотности в настоящую эпоху равен $\Omega_0 = \Omega_{rad}$, и пространство расширяется в пределах фрактальной структуры. Они также качественно рассмотрели модификацию физики анизотропии космического фонового излучения, нуклеосинтеза и образования структуры.

Влияние темной энергии. В работах Chernin et al. (2000), Chernin (2001), Baryshev et al. (2001) было высказано предположение, что холодный локальный хаббловский поток является признаком преобладания космологического вакуума или темной энергии. Недавнее космологическое моделирование задачи N-тел, выполненное Maccio et al. (2004), подтвердило, что включение космического вакуума в вычисления ведет к существенно более низкой дисперсии скоростей в областях, подобных Локальному Объему, по сравнению с отсутствием вакуума.

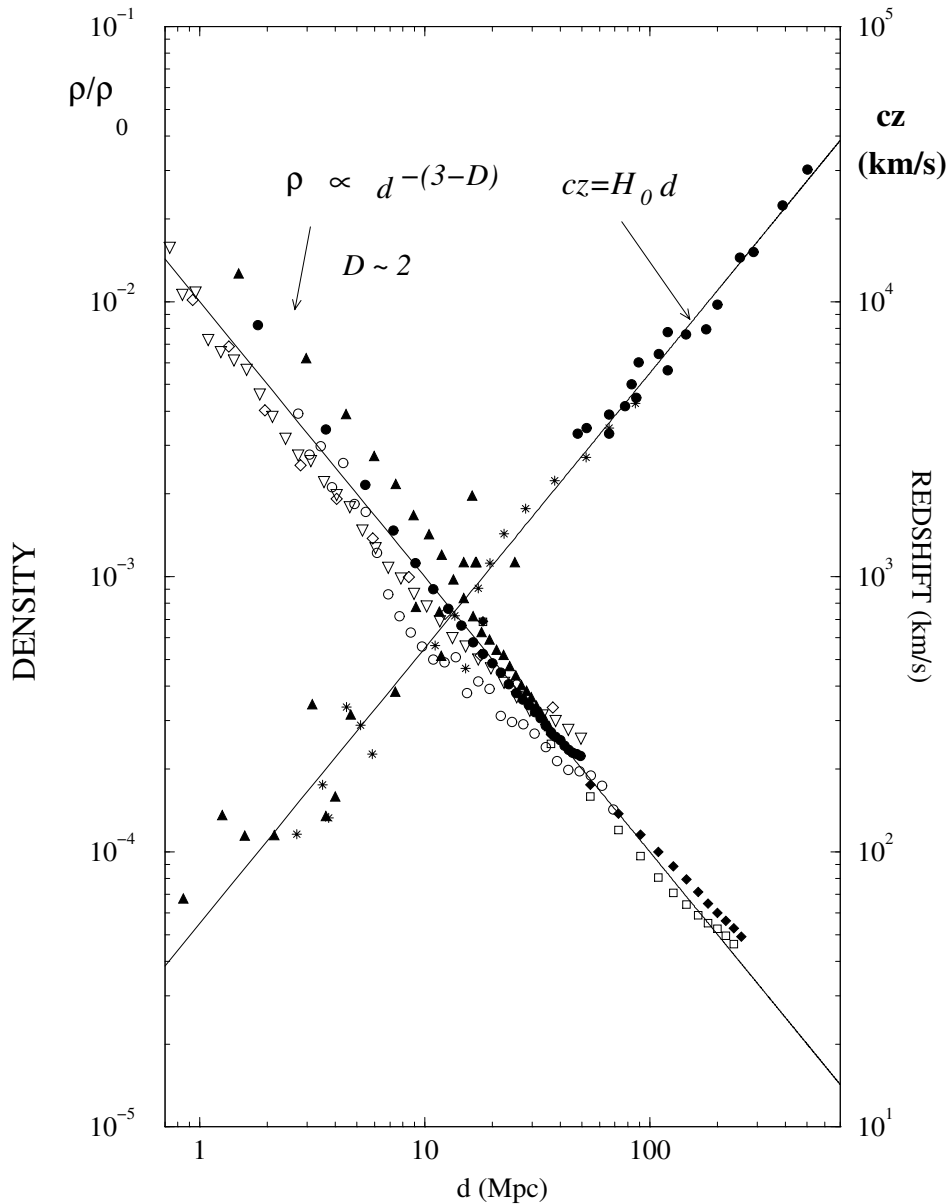


Рис. 8: Закон Хаббла в пределах фрактального распределения галактик (Барышев и др., 1998).

6.2.2. Проблема происхождения фрактальной структуры

В 1970-е годы Хаггерти, работавший в Центре статистической физики Университета Техаса (Haggerty, 1971), разработал ньютоновскую модель образования иерархических самогравитирующих структур. Она была основана на проведенных Пригожиным и Северне исследованиях немарковской кинетической теории двойных гравитационных взаимодействий с необратимым ростом энергии корреляции.

Ostriker & Cowie (1981) предложили сценарий взрывного происхождения крупномасштабных

структур с крупными полостями и сверхскоплениями галактик на масштабах до 100 Мпк. Такая картина образования галактик близка к тому, как рассматривается образование звезд в Галактике. В рамках этого подхода в работе Schulman & Seiden (1986) для вывода показателя степени корреляционной функции получающихся структур была применена теория протекания и численное моделирование. Авторы получили $\gamma \approx 1$, что соответствует фрактальной размерности $D \approx 2$. Чтобы получить общепринятую величину $D \approx 1.2$, они пытались найти механизм изменения первоначального наклона.

Модели образования фрактальных крупномасштабных структур были рассмотрены в работах Szalay & Schramm (1985), Pietronero & Kuperes (1986), Maddox (1987), Luo & Schramm (1992).

В работах Perdang (1990), de Vega et al. (1996, 1998), Combes (1998) Saslaw (2000) были рассмотрены статистическая механика и термодинамика самогравитирующего газа. Интригующий результат состоит в том, что ньютоновские системы самогравитирующих N тел могут иметь квазиравновесное фрактальное состояние с размерностью ≈ 2 , хотя некоторые проблемы остаются открытыми и требуют дальнейшего изучения.

Bottaccio et al. (2002), Baertschiger et al. (2002, 2004) выполнили моделирование N тел с целью изучения гравитационного роста и возможного происхождения фрактальных структур из начальных малых флуктуаций плотности. Авторы обнаружили, что на результаты стандартного космологического моделирования сильно влияет дискретность и отметили, что хаббловский временной масштаб слишком мал для развития наблюдаемых фрактальных структур в пределах всего диапазона масштабов.

Сильные флуктуации плотности на больших красных смещениях ведут к противоречию с малыми температурными флуктуациями космического микроволнового фонового излучения и к проблеме времени образования для самых крупных структур. Возможным решением является то, что стандартный сценарий гравитационного роста крупномасштабной структуры из малых начальных флуктуаций плотности нужно пересмотреть. Кроме того, наблюдаемая анизотропия космического микроволнового фонового излучения может быть существенно искажена галактическим и внегалактическим экранирующим веществом, так что фрактальные начальные условия могут быть не связаны с наблюдаемым $\Delta T/T$ (Schwarz et al., 2004).

6.3. Космологический принцип

В литературе существует большая путаница в том, как следует понимать космологический принцип фрактальности Мандельброта и какова его связь с космологическим принципом однородности Эйнштейна. Ниже мы сравниваем эти принципы и показываем, что принцип фрактальности является естественным обобщением принципа однородности.

6.3.1. Космологический принцип Эйнштейна

Einstein (1917) применил общую теорию относительности к космологической проблеме, т.е. для

построения модели вселенной в целом. Еще не зная о галактиках, он представлял мир, заполненный звездами, и утверждал, что они имеют естественное пространственное распределение, которое однородно: концентрации вещества вокруг любого выделенного центра должны со временем испариться и однородно рассеяться по всей вселенной. Позже, в переписке с Селети, Эйнштейн отверг иерархическое распределение звезд (см. раздел 4.1). Эйнштейн постулировал однородное распределение вещества и ввел в космологию релятивистскую теорию гравитации. Результатом явился мир с однородной геометрией.

У космологического принципа Коперника много лиц, как подробно обсуждает Рудницкий в своей книге (Rudnicki, 1995; см. также Harrison, 2000). Одна из формулировок — “все точки во Вселенной одинаковы” — естественным образом выполняется в однородном мире. Помимо отсутствия центра, еще одной положительной стороной однородности является упрощение уравнений Эйнштейна, которое позволило ему получить статическую сферическую модель мира. Наконец, Friedmann (1922) освободил вселенную от этого жесткого состояния, допустив расширение пространства однородно распределенного вещества.

Название “космологический принцип Эйнштейна” для гипотезы однородного крупномасштабного распределения вещества ввел Эдвард Милн, который в 1930-е годы проанализировал основы космологии. Кроме того, он так сформулировал версию этого космологического принципа, ориентированную на наблюдателя: “...вся картина мира, которую видит один наблюдатель (привязанный к фундаментальной частице или галактике) похожа на картину мира, которую видит любой другой наблюдатель”.

В те ранние годы космологии не было прямого наблюдательного доказательства однородности вселенной и космологи руководствовались теоретическими рассуждениями.

Современный взгляд на космологический принцип. Начало любой космологической модели лежит в космологических принципах — особых гипотезах, которые считаются справедливыми для всей, возможно, бесконечной вселенной, даже если наблюдать можно только ее конечную часть. Некоторые принципы затрагивают глубокие вопросы познания и неявно считаются истинными, например, что нам доступно знание всей Вселенной, и что законы физики везде одинаковы и действуют одинаково.

В нынешнем космологическом мышлении содержание космологического принципа является довольно глубоким и сложным. Укажем три особых утверждения, которые обычно считаются от-

правной точкой при построении космологических моделей.

КП1. *Физические законы одинаковы для всего пространства и времени.*

КП2. *Фундаментальные физические константы являются истинными константами.*

КП3. *Частные физические свойства, включая стандарты измерения, одинаковы для всего пространства и времени.*

С развитием космологии эти утверждения, возможно, потребуют корректировки или даже радикального изменения в свете новых наблюдений и теоретических идей. Например, многомерные теории предсказывают изменение физических констант. Однако все современные наблюдательные тесты сильно ограничивают любые такие изменения (Uzan, 2002). Требование одинаковых физических законов (КП1) также включает в себя возможность открытия новых законов космологической физики, которые проявляются только на очень больших масштабах пространства, времени и массы. Важный принцип “большее отличается” ввел Anderson (1972), который подчеркивал, что каждый новый уровень сложности материальных систем вводит новые законы для их поведения.

В современной космологии *космологический принцип* понимается в узком смысле как гипотеза о крупномасштабном распределении вещества во вселенной. Например, утверждение, что вещество имеет однородное и изотропное распределение, является основой стандартной космологической модели. В настоящее время наблюдения показывают, что космологический принцип фрактальности Мандельброта стал важной альтернативой для пространственного распределения светящегося вещества.

6.3.2. Вывод однородности из предположения об изотропии

Walker (1944), британский математик, тесно сотрудничавший с Милном, доказал, что однородность следует из его гипотезы о “локальной сферической симметрии”, в которой предполагается, что изотропия существует локально вокруг каждой точки риманова многообразия.

Простое рассуждение, ведущее к однородности, когда вокруг каждой точки существует изотропия, можно найти в книге Вайнберга “Первые три минуты” (Weinberg, 1977). Автор показывает, как можно перейти из любой точки в другое произвольное место вдоль дуги круга, на которой плотность остается одинаковой. Следовательно, плотность одна и та же в каждой точке. Однако, строго говоря, этот вывод основывается на скрытом математическом предположении регулярности, т.е.

на существовании однородной плотности вокруг каждой точки. Только тогда из левой части действительно следует вывод: *локальная изотропия + отсутствие центра + регулярность* → *однородность*. Здесь “локальная изотропия плюс отсутствие центра” означает, что все точки эквивалентны, и вокруг каждой точки закон плотности не зависит от направления (хотя он может зависеть от расстояния до этой точки). “Регулярное” распределение вещества описывается непрерывными гладкими математическими функциями.

В главе “Упрощающие предположения космологии” своей книги *Введение в космологию* Narlikar (1993) явно вводит предположение гладкой жидкостной аппроксимации, которое, по сути, означает переход от дискретного распределения частиц к непрерывному распределению плотности. Именно это и называется “регулярностью”. Это означает, что можно использовать понятие плотности массы в каждой точке пространства, как в жидкости. Таким образом, именно объединение локальной изотропии, отсутствия центра и гладкости дают однородность. В этом случае Космологический принцип сводится к утверждению об однородности распределения вещества.

6.3.3. Космологический принцип Мандельброта

В своей книге *Фракталы: форма, случайность и размерность* Mandelbrot (1977) предвидел, что галактики распределены фрактально, и дал первое математическое описание фрактальных свойств такого распределения. Он вспоминает, как примерно в 1965 году он стремился соединить закон убывающей плотности с моделью, в которой “не существует центра вселенной” или “центр находится везде”.

Рассмотрение Мандельбротом фрактального распределения галактик явилось большим концептуальным шагом в описании космологического распределения вещества. Это своего рода синтез иерархических структур (“тезис”) и однородности (“антитезис”), основанных, по сути дела, на случайности. Действительно, существует фундаментальная разница между истинно случайными фракталами и жестко иерархичными протофракталами. В протофракталах иерархия вводится “из ничего”, прямым определением ее уровней. Но фракталы внутренне содержат масштабную инвариантность (самоподобие), и проявление иерархии является неизбежным следствием. Полезным примером является пыль Леви, которая создается процессом случайного блуждания, в котором направление каждого шага выбирается изотропно, а длина шага подчиняется некоторому распределению вероятности.

Фрактальность также несет в себе следы однородности. Внутри фиксированного радиуса, т.е. для фиксированного масштаба, каждый наблюдатель насчитывает *в среднем* одно и то же число элементов. Но при изменении радиуса обнаруживается “новая однородность” с новой средней численной плотностью. Кроме того, для случайных фракталов не существует центра — это еще один остаток однородности.

Таким образом, Мандельброт сделал первый шаг к подлинным фракталам в космологии, обобщив космологический принцип Эйнштейна, соответствующий $D = 3$, до фрактальности, допускающей неоднородное распределение галактик с $D < 3$. Его “Условный космографический принцип” утверждает, что все наблюдатели видят вокруг себя один и тот же космический пейзаж, но только при условии, что они проводят наблюдения с какого-то элемента структуры (галактики). Слово “условный” в данном контексте подчеркивает, что каждый наблюдатель занимает материальный элемент структуры (ср. “условная плотность”).

Космологический принцип фрактальности Мандельброта утверждает, что наблюдатели, привязанные к материальным элементам структуры, эквивалентны, что близко к формулировке Милна. Таким образом, фрактальность Вселенной прекрасно удовлетворяет космологическому принципу Милна. Она также автоматически обеспечивает то, что в статье Karachentsev (1975) названо “экологической поправкой к принципу Коперника” — реальный наблюдатель может жить только на материальном небесном теле или вблизи от него. Это обычно называется слабым антропным принципом. В этом смысле космологический принцип Коперника содержится в принципе фрактальности Мандельброта и, следовательно, утверждения о “беспринципной” фрактальной вселенной (см., например, работы Coles, 1998; Wu et al., 1999) не верны.

Всегда ли изотропия означает однородность? Доказательство однородности основано на том, что плотность вокруг каждой точки задается гладкой функцией, что справедливо для регулярных распределений, но не для фракталов. Именно гладкость стирает фрактальность и создает однородность. Таким образом, строго говоря, из локальной изотропии и принципа отсутствия центра можно вывести фрактальность структуры, в которой однородность является всего лишь частным случаем с $D = 3$ (см. Sylos Labini, 1994).

Конечно, вокруг каждого наблюдателя никогда не существует точной локальной изотропии, даже в однородном мире, тем более, внутри фрактального распределения. Вместо этого можно говорить о статистической изотропии, так что небо, наблю-

даемое из любой галактики, “выглядит примерно одинаково”. В частности, подсчеты галактик как функция звездной величины похожи для окрестностей каждой галактики, поскольку похожи радиальные распределения галактик. Естественно предположить, что для распределений, составленных из дискретных точек, существует обобщение вышеуказанной цепочки рассуждений: *статистическая изотропия + отсутствие центра* → *фрактальность*. Статистическая изотропия и отсутствие центра без ограничивающего предположения о гладкой математике, таким образом, приводят к изотропному фракталу.

Согласно рассмотренному в разделе 2.4.5, причиной видимого изотропного распределения галактик по небу может являться проекция фрактальной структуры с размерностью $D \geq 2$. Согласно теореме о фрактальных проекциях, результирующее распределение будет иметь фрактальную размерность $D_{pr} = 2$, что означает однородность на двухмерной плоскости или изотропию на небесной сфере.

Два других фактора, влияющих на видимую изотропию на небе, — это лакуарность и функция светимости. Сейчас известно, что степень пятнистости на небе зависит не только от фрактальной размерности, но и от лакуарности, которая является мерой того, как часто встречаются крупные пустоты. Численное моделирование показало, что фракталы с малой лакуарностью могут иметь довольно гладкие проекции на небе. Вторая причина сглаживания пятнистости — большая разница в светимости небесных тел. В результате два объекта с одинаковой видимой яркостью в действительности могут иметь очень разные расстояния. Перемешивание близких и далеких объектов скрывает скопления и заполняет дыры. Например, это уменьшает анизотропию для очень далеких радиодисточников.

6.3.4. К согласию между Эйнштейном и Мандельбротом

Мы действительно знаем о подлинно однородных компонентах вселенной: наблюдаемый фотонный газ космического фонового излучения, океан возможных низкоэнергетических нейтрино, и, что может быть, более важно, предполагаемый физический вакуум или темная энергия. Поскольку средняя плотность фрактального вещества убывает с ростом масштаба, неизбежно будет существовать масштаб, за которым плотность однородной компоненты превосходит плотность фрактальной компоненты. Следовательно, в конце концов вселенную на таких масштабах можно считать однородной. Однако это вызвано не распределением галак-

тик, а однородностью релятивистской компоненты вещества.

Что касается фрактального распределения галактик, то существуют две альтернативы: конечный и бесконечный диапазон фрактальности. Правда, для идеального чисто математического фрактала не существует пределов масштаба. Название “фрактальная вселенная” часто связывается с бесконечным фракталом. Такая вселенная имела бы нулевую среднюю плотность. Но реальные физические объекты обычно имеют верхнюю и нижнюю границы, между которыми наблюдаются фрактальные свойства. Таким образом, ожидается также, что фрактальное распределение галактик появляется только в пределах конечного интервала масштабов. Одной из возможностей является то, что Вселенная становится однородной на некотором максимальном масштабе R_{hom} . Поэтому можно, как сделал Мандельброт, допустить, что распределение вещества может стать однородным на очень больших масштабах, оставаясь фрактальным на более мелких масштабах. С любой однородной компонентой вещества, такой как фотонный газ или космологический вакуум, вселенная становится однородной на достаточно большом масштабе. Таким образом, как Эйнштейн, так и Мандельброт интуитивно выделили два фундаментальных свойства Вселенной — однородность и фрактальность.

7. Заключительные замечания

Исторические вехи на пути исследования крупномасштабной структуры Вселенной отмечены в табл. 2. Здесь видно, что за период, предшествующий 1970-ым годам, появилось много пионерских наблюдательных результатов и теоретических соображений. Идея об иерархическом распределении вещества возникла в математическом виде благодаря Фурнье, Шарлье и Селети. Любопытно, что проблемы, которые обсуждали Эйнштейн и Селети в 1920-е годы, в настоящее время определяют целые направления в физике крупномасштабных структур (см. табл. 3).

Наблюдатели открыли сильную комковатость распределения галактик и подготовили каталоги угловых положений галактик и скоплений, по которым были обнаружены первые сверхскопления до размеров 100 Мпк. Это сгустило тучи над однородными космологическими моделями, и о значении таких неоднородностей кипели жаркие споры. В те времена, когда еще не было информации о расстояниях, казалось, что были найдены убедительные аргументы в пользу однородного распределения галактик. Во-первых, подсчеты ярких галактик согласовывались с законом однородно-

сти 0.6m. Во-вторых, причиной видимой кластеризации могли быть флуктуации поглощения пылью в Млечном Пути. В-третьих, линейность закона Хаббла на малых масштабах рассматривалась как свидетельство однородности галактик начиная с малых масштабов.

Между тем, Мандельброт совершил концептуальный прорыв, предложив описывать кластеризацию галактик стохастическим фракталом. После того, как была установлена природа спиральных туманностей, дискуссии вокруг фрактальной размерности и максимального масштаба кластеризации галактик составили ядро нового Великого Спора.

В те ранние годы к угловому распределению галактик интенсивно применялся метод корреляционной функции, используемый в статистической физике для описания однородных систем с малыми флуктуациями плотностей. Важным началом этого была работа Totsuji & Kihara (1969), в которой была открыта степенная зависимость угловой корреляционной функции с показателем степени $\gamma = 1.8$ и малым масштабом однородности $r_0 = 5h_{100}^{-1}$ Мпк. Полное описание результатов эпохи каталогов угловых положений галактик дано в работе Fall (1979) и книге Пиблса (Peebles, 1980).

С тех пор корреляционная функция применялась для многих каталогов угловых и пространственных положений галактик и, по словам Kersch et al. (2000), “двухточечная корреляционная функция стала одним из самых популярных статистических инструментов в астрономии и космологии”. Эти работы создали ощущение уверенности в том, что распределение галактик однородно на масштабах, превосходящих $10h_{100}^{-1}$ Мпк.

Однако когда изучение кластеризации галактик вступило в эпоху трехмерных карт, последовал ряд открытий, неожиданных с точки зрения “корреляционной длины” в 5 Мпк. О первых обнаружениях реальных крупномасштабных структур до 50 Мпк сообщалось на Таллиннской конференции в 1977 году. После этого до настоящего времени были открыты все более и более крупные структуры. Это доказывает, что предыдущие обнаружения были не редкими случайными событиями, но действительно отражали существенные свойства кластеризации галактик.

Решающим шагом явилось введение Pietronero (1987) статистического метода, подходящего для анализа фрактального распределения галактик. Этот инспирированный фракталами метод условной плотности выявил масштабно-инвариантную кластеризацию галактик с фрактальной размерностью $D \approx 2$ до масштабов, на которых метод применим (Sylos Labini et al., 1998).

Кроме того, стало ясно, что классическая двух-

точечная редуцированная корреляционная функция страдает двумя большими недостатками. Во-первых, из-за эффекта проекции угловая корреляционная функция не может обнаружить пространственные структуры с фрактальной размерностью $D \geq 2$. Во-вторых, из-за условия нормировки и угловая, и пространственная корреляционные функции систематически искажают величины шкалы однородности (θ_0, r_0) и корреляционного показателя степени (γ_{ang}, γ) по сравнению с истинными значениями для полной корреляционной функции. Важность этих эффектов видна из получившихся расхождений в величине корреляционной размерности: $D = 1.2$, выведенной ξ -методом, по сравнению с $D \approx 2$, которую дает Γ -метод для главных трехмерных каталогов. Указанные выше эффекты объясняют, почему результаты ξ - и Γ -анализов привели к разным выводам о шкале однородности и показателе степени корреляционной функции. Эти противоречивые результаты относительно величины фрактальной размерности были также причиной полемики вокруг мультифрактального анализа галактических данных.

Новые обширные данные — 200 000 галактик для обзора 2dF (вместо 2000 для CfA) — вместе с анализом методом Γ -функции показывают, что неискаженная величина корреляционного показателя степени $\gamma \approx 0.8$, что соответствует фрактальной размерности $D = 2.2 \pm 0.2$. Масштаб однородности R_{hom} имеет более низкий предел, соответствующий максимальной сфере, полностью погруженной в объем галактической выборки, что составляет около $40h_{100}^{-1}$ Мпк для 2dF и $70h_{100}^{-1}$ Мпк для первого выпуска SDSS. Чтобы получить оценку R_{hom} на более крупных масштабах, нужно увеличить телесный угол обзора. Кроме того, существуют наблюдательные свидетельства, такие как Великая Стена Слоана $450h_{100}^{-1}$ Мпк (Gott et al. 2003) и неоднородности на $300h_{100}^{-1}$ Мпк в распределениях квазаров 2dF, того, что R_{hom} может достигать таких больших значений.

Чтобы получить надежное соотношение масс-радиус $M(r)$ по наблюдательным данным, очень важно использовать подходящие статистические методы анализа (вроде условной плотности) и следить за масштабами расстояний R_{sep} и R_{max}^{sph} , определяющими область применимости используемых методов.

Для дальнейшего прогресса в анализе крупномасштабной структуры в обзорах красных смещений галактик нужны три больших числа: большой телесный угол на небе, большое число галактик и большое отношение глубина/разрешение. Необходимо специальное исследование распределения темного вещества, которое можно в настоящее время выполнить с помощью техники гравитацион-

ного линзирования (Mellier, 1999; Wittman et al., 2000; Gray et al., 2002; Refregier, 2003). Первые результаты анализа линзирования показали, что темное и светящееся вещество распределены в пространстве похожим образом.

Просуммируем основные проблемы, с которыми сталкиваются современные исследования крупномасштабной кластеризации галактик:

- из-за проекции на небо угловое распределение галактик теряет информацию о структурах с фрактальной размерностью $D \geq 2$;

- оценки ξ -функции из-за условия нормировки дают некорректные величины масштаба неоднородности R_{hom} и фрактальной размерности D ;

- решающую роль в статистическом анализе выборки галактик играют три величины: среднее расстояние между галактиками R_{sep} , радиус сферы R_{max}^{sph} , полностью погруженной в геометрию выборки, и полное число галактик N_{gal} в подвыборках, полных по объему;

- значительные флуктуации в полученной величине D вызываются “космической вариацией” (только одна реализация стохастического процесса) и “ограниченностью выборки” (конечный доступный объем);

- метод проектирования корреляционной функции пространства красных смещений нельзя применять к фрактальным структурам с $D \geq 2$, следовательно, для того, чтобы извлечь корреляционные свойства распределения галактик в реальном пространстве, необходимы новые методы;

- дисперсия парных скоростей 500-600 км/с на масштабах 1-10 Мпк, полученная методом ξ -функции, неожиданно велика по сравнению с дисперсией скоростей $\sigma_v < 100$ км/с в Локальном Объем с $r < 10$ Мпк;

- разница в кластеризации галактик различного типа и светимости может потребовать мультифрактального анализа;

- понимание происхождения и эволюции наблюдаемого фрактального распределения галактик может потребовать пересмотра стандартной картины гравитационного роста структуры и необходимости рассмотреть первичные фрактальные флуктуации плотности.

Можно сделать вывод, что фрактальность кластеризации галактик стала фундаментальным явлением наблюдательной космологии, которое должны объяснить теоретические модели Вселенной.

Благодарности. Работа была поддержана Академией Финляндии (проект “Фундаментальные проблемы наблюдательной космологии”) и фондом Turun Yliopistosäätiö. Мы благодарим Лучиано Пиетронеро и Фран-

ческо Силос Лабини за ценную информацию, поддержку и критику. Благодарим также Фреда Роста за очень полезные замечания.

Список литературы

- Abell G. O., 1958, The distribution of rich clusters of galaxies, *ApJS*, **3**, 211
- Abell G. O., 1961, Evidence regarding second-order clustering of galaxies and interactions between clusters of galaxies, *AJ*, **66**, 607
- Abell G. O., Corwin H.G., Olowin R.P., 1989, A catalog of rich clusters of galaxies, *ApJS*, **70**, 1
- Alfvén H., 1983, On hierarchical cosmology, *Astrophys. Space Sci.*, **89**, 313
- Ambartsumian V.A., 1940, Fluctuations in numbers of extragalactic nebulae and Galactic extinction, *Bulletin of Abastuman Observatory*, **4**, 17 (in Russian)
- Ambartsumian V.A., 1951, On the theory of fluctuations in the apparent distribution of stars on the sky (in Russian), *Communication of Byurakan Observatory*, **6**
- Anderson P.W., 1972, More Is Different, *Science*, **177**, 393
- Axenides M., Perivolaropoulos L., 2002, Dark energy and the quietness of the local Hubble flow, *Phys. Rev. D*, **65**, 127301, [astro-ph/0201524]
- Baertschiger T., Joyce M., Sylos Labini F., 2002, Power-law correlation and discreteness in cosmological N-body simulations, *ApJ*, **581**, L63
- Baertschiger T., Sylos Labini F., 2004, Growth of correlations in gravitational N-body simulations, *Phys. Rev. D*, **69**, 123001-1
- Bahcall N.A., 1988, Large-scale structure in the universe indicated by galaxy clusters., *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **26**, 631
- Bahcall J.N. & Joss P.C., 1976, Is the local supercluster a physical association?, *ApJ*, **203**, 23
- Bahcall N.A., Soneira R.M., 1983, The spatial correlation function of rich clusters of galaxies, *ApJ*, **270**, 20
- Bahcall N.A., Burgett W.S., 1986, Are superclusters correlated on very large scale?, *ApJ*, **300**, L35
- Bahcall N.A., Dong F., Hao L. et al., 2003, The richness-dependent cluster correlation function: early Sloan digital sky survey data, *ApJ*, **599**, 814
- Balian R., Schaeffer R., 1989, Scale-invariant matter distribution in the universe, *A&A*, **226**, 373
- Bardin J.M., Bond J.R., Kaiser N., Szalay A.S., 1986, The statistics of peaks of gaussian random fields, *ApJ*, **3004**, 15
- Baryshev Yu., 1981, The hierarchical structure of metagalaxy – a review of problems, *Astrofiz.Issled. (Izv.Spets.Astrofiz.Obs.)*, **14**, 24 (English translation: 1984 Allerton Press)
- Baryshev Yu., 1992, “Modern state of observational cosmology”, *VINTI, Itogi Nauki i Techniki, Series Classical Field Theory and Gravity Theory, vol.4: Gravitation and Cosmology*, p.89 (in Russian)
- Baryshev Yu., 1994, On the fractal nature of the large scale structure of the universe. *Astron. Astrophys. Transactions*, **5**, 15
- Baryshev Yu., 2000, Conceptual Problems of Fractal Cosmology, *Astron. Astrophys. Transactions*, **19**, 417
- Baryshev Yu., 2003, *The spatial distribution of galaxies and tests of relativistic cosmology*, Doctor of Sciences thesis, St. Petersburg University, St.Petersburg
- Baryshev Yu., Sylos Labini F., Montuori M., Pietronero L., 1994, Facts and Ideas in Modern Cosmology, *Vistas in Astronomy*, **38**, 419
- Baryshev Yu., Ezova Yu., 1997, Gravitational Mesolensing by King Objects and Quasar–Galaxy Associations, *Astron. Reports*, **41**, 436
- Baryshev Yu., Sylos Labini F., Montuori M., Pietronero L., Teerikorpi P., 1998, On the fractal structure of galaxy distribution and its implications for cosmology, *Fractals*, **6**, 231
- Baryshev Yu., Chernin A. & Teerikorpi P., 2001, The cold local Hubble flow as a signature of dark energy, *A&A*, **378**, 729
- Baryshev Yu. & Teerikorpi P., 2002, *Discovery of Cosmic Fractals* (World Scientific Publishing, Singapore), 408pp
- Baryshev Yu., Bukhmastova Yu., 2004, The method of a two-point conditional column density for estimating the fractal dimension of the distribution of galaxies, *Astron. Letters*, **30**, 444
- Benoist C., Maurogordato S., da Costa L.N., Cappi A., Schaeffer R., 1996, Biasing in the galaxy distribution, *ApJ*, **472**, 452
- Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A., 1984, *J. Phys. A.*, **17**, 3251
- Best J.S., 2000, An examination of the large-scale clustering of the Las Campanas redshift survey, *ApJ*, **541**, 519
- Bharadwaj S., Gupta A.K., Seshadr T.R., 1999, Nature of clustering in the Las Campanas redshift survey, *A&A*, **351**, 405
- Biviano A., 2000, From Messier to Abell: 200 years of science with galaxy clusters, in: *Constructing the Universe with Clusters of Galaxies*, IAP 2000 meeting, Paris, eds.: F. Durret & D. Gerbal; [astro-ph/0010409]
- Blumenfeld R., Mandelbrot B.B., 1997, Lévy dusts, Mittag-Leffler statistics, mass fractal lacunarity, and perceived dimension, *Phys. Rev. E*, **56**, 112
- Bondi H., 1947, Spherically symmetrical models in general relativity, *MNRAS*, **107**, 410
- Bonnor W., 1972, A non-uniform relativistic cosmological model, *MNRAS*, **159**, 261
- Bottaccio M., Capuzzo-Dolcetta R., Mocchi P., Montuori M., Pietronero L., 2002, *Europhys. Lett.*, **7**, 315
- Caldwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J., 1998, Cosmological imprint of an energy component with general equation of state, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 1582
- Caldwell R.R., Kamionkowski M., & Weinberg N., 2003, Phantom Energy and Cosmic Doomsday, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 071301 [astro-ph/0302506]
- Calzetti D., Einasto J., Giavalisco M., Ruffini R., Saar E., 1987, The correlation function of galaxies in the direction of the Coma cluster, *Astrophys. Space Sci.*, **137**, 101
- Calzetti D., Giavalisco M., Ruffini R., 1988, The normalization of the correlation functions for extragalactic structures, *A&A*, **198**, 1
- Calzetti D., Giavalisco M., Ruffini R., 1989, The angular

- two-point correlation functions and the cellular fractal structure of the Universe, *A&A*, **226**, 1
- Carpenter E.F., 1938, Some characteristics of associated galaxies I. A density restriction in the metagalaxy, *ApJ*, **88**, 344
- Charlier C., 1908, Wie ein Unendliche Welt aufgebaut sein kann, *Arkiv f. matematik, astronomi och fysik*, Band 4, No 24, p.1
- Charlier C., 1922, How an infinite world may be built up, *Arkiv f. matematik, astronomi och fysik*, Band 16, No 22, p.1
- Chernin A., 2001, Cosmic vacuum, *Physics-Uspokhi*, **44**, 1153
- Chernin A., Teerikorpi P., Baryshev Yu., 2000, Why is the Hubble flow so quiet?, *astrp-ph/0012021*
- Chernin A., Karachentsev I., Valtonen M., Dolgachev V., Domozhilova L., Makarov D., 2004, The very local Hubble flow: computer simulations of dynamical history, *A&A*, **415**, 19
- Chiang L.Y., Coles P., 2000, Phase information and the evolution of cosmological density perturbations, *MNRAS*, **311**, 809
- Coleman P.H., Pietronero L., Sanders R.H., 1988, Absence of any characteristic correlation length in the CfA galaxy catalogue, *A&A*, **200**, L32
- Coleman P.H., Pietronero L., 1992, The Fractal Structure of the Universe, *Phys. Rep.*, **213**, 311
- Coles P., 1998, An unprincipled universe? *Nature*, **391**, 120
- Coles P., Chiang L.Y., 2000, Characterizing the nonlinear growth of large-scale structure in the Universe, *Nature*, **406**, 376
- Colless M., Dalton G., Maddox S. et al. (the 2dFGRS team), 2001, The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts, *MNRAS*, **328**, 1039
- Colless M. et al. (the 2dFGRS team), 2003, *astro-ph/0306581*
- Combes F., 1998, Fractal structure driven by self-gravity: molecular clouds and the Universe, *astro-ph/9804048*
- Conklin E.K. & Bracewell R.N., 1967, Isotropy of Cosmic Background Radiation at 10 690 MHz, *Phys. Rev. Letts.*, **18**, 614
- Courtois H., Paturel G., Sousbie T., Sylos Labini F., 2004, The LEDA galaxy distribution: I. Maps of the Local Universe, *A&A*, **423**, 27
- Da Costa L.N. et al., 1991, Southern sky redshift survey: the catalog, *ApJS*, **75**, 935
- Da Costa L.N. et al., 1994, A complete southern sky redshift survey, *ApJ*, **424**, L1
- Davis M., 1997, in the Proc. of the Conference "Critical Dialogues in Cosmology", ed. Turok, N., p.13 (World Scientific, Singapore, 1997)
- Davis M., Peebles P.J.E., 1983, A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations, *ApJ*, **267**, 465
- Davis M., Meiksin A., Strauss M.A., da Costa L.N., Yahil A., 1988, On the universality of the two-point galaxy correlation function, *ApJ*, **333**, L9
- Di Nella H., Paturel G., 1994, Large-scale structure of the Universe up to a distance of 200 Mpc, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 319, Sér.II, 57
- Dogterom M., Pietronero L., 1991, *Physica A*, **171**, 239
- Durrer R., Eckmann J.-P., Sylos Labini F., Montuori M., Pietronero L., 1997, Angular projections of fractal sets, *Europhys. Lett.*, **40**, 491
- Eckmann J.-P., Järvenpää E., Järvenpää M., Procaccia I., On the fractal dimension of the visible universe, in: *Simplicity Behind Complexity* (Euroattractor 2002), ed.: W. Klonowski (Pabst Science Publishers, Lengerich 2004)
- Einasto J., Klypin A., Saar E., 1986, Structure of superclusters and supercluster formation – V. Spatial correlation and voids, *MNRAS*, **219**, 457
- Einstein A., 1917, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, **1**, 142
- Einstein A., 1922, Bemerkung zur Seletyschen Arbeit: Beitr 244ge zum kosmologischen Problem, *Annalen der Physik*, Ser.4, **69**, 436
- Eckholm T., Lanoix P., Paturel G., Teerikorpi P., Fouque P., 1999, Investigations of the Local Supercluster Velocity Field: II. A study using Tolman-Bondi solution and galaxies with accurate distances from the Cepheid PL-relation, *A&A*, **351**, 827
- Eckholm T., Baryshev Yu., Teerikorpi P., Hanski M. & Paturel G., 2001, On the quiescence of the Hubble flow in the vicinity of the Local group: a study using galaxies with distances from the Cepheid PL-relation, *A&A*, **368**, L17
- Fairall A., 1998, *Large-scale structures in the universe*, John Wiley & Sons
- Falconer K., 1990, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons N.Y.
- Fall S.M., 1979, Galaxy correlations and cosmology, *Reviews of Modern Physics*, **51**, 21
- Fall S.M. & Tremaine S., 1977, On estimating correlations in the spatial distribution of galaxies, *ApJ*, **216**, 682
- Fang L.L., Mo H.J., Ruffini R., 1991, The cellular structure of the universe and cosmological tests, *A&A*, **243**, 283
- Fesenko B.I., 1975, The galactic extinction from the apparent distribution of galaxies., *Soviet Astronomy*, **19**, 177
- Feynman R., Morinigo F., Wagner W., 1995, *Feynman Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley Publ. Comp.
- Fischer K. et al., 1996, The IRAS 1.2 Jy survey: redshift data, *ApJS*, **100**, 69
- Fournier d'Albe E., 1907 *Two New Worlds* (Longmans Green, London)
- Friedmann A., 1922, On the curvature of space, *Zeits. f. Physik*, **10**, 377
- Friedmann A., 1924, On a possibility of world with constant negative curvature of space, *Zeits. f. Physik*, **21**, 326
- Gabrielli A., Sylos Labini F., Durrer R., 2004a, Biasing in Gaussian random fields and galaxy correlations, *ApJ*, **531**, L1
- Gabrielli A., Sylos Labini F., Joyce M., Pietronero L., 2004b, *Statistical physics for cosmic structures*, Springer Verlag (GSLJP)
- Geller M. & Huchra J., 1989, *Science*, **246**, 897
- Giovanelli R., Haynes M., 1991, Redshift surveys of galax-

- ies, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **29**, 499
- Gott J.R., Juric M., Schlegel D. et al., 2003, A map of the universe. [astro-ph/0310571]
- Governato F., Moore B., Cen R., Stadel J., Lake G., Quinn T., 1997, The Local Group as a test of cosmological models, *New Astronomy*, **2**, 91
- Gray M., Taylor A., Meisenheimer K., Dye S., Wolf G., Thommes E., 2002, Probing the Distribution of Dark Matter in the A901/902 Supercluster with Weak Lensing, *ApJ*, **568**, 141
- Gromov A., Baryshev Yu., Suson D. & Teerikorpi P., 2001, Lemaitre-Tolman-Bondi model: fractality, non-simultaneous bang time and the Hubble law. *Gravitation & Cosmology*, **7**, 140
- Gromov A., Baryshev Yu., Teerikorpi P., 2004, Two-fluid matter-quintessence FLRW models: energy transfer and the equation of state of the universe, *A&A*, **415**, 813
- Grujić, 2001, The Concept of Fractal Cosmos: I. Anaxagoras's Cosmology, *Serbian Astr.J.*, No 163, 21
- Grujić, 2002, The Concept of Fractal Cosmos: II. Modern Cosmology, *Serbian Astr.J.*, No165, 45
- Haggerty M.J., 1971, A Newtonian model for the creation of a hierarchical cosmology, *ApJ*, **166**, 257
- Haggerty M.J., Wertz J.R., 1972, On the redshift-magnitude relation in hierarchical cosmologies, *MNRAS*, **155**, 495
- Harrison E. R., 1987, *Darkness at Night* (Harvard University Press)
- Harrison E. R., 2000, *Cosmology – the science of the universe*, 2nd edition (Cambridge University Press)
- Haynes M., Giovanelli R., 1988, "Large-scale motion in the Universe", eds. Rubin V.C., Coyne G., Princeton University Press, PrincetonM
- Hawkins E., Maddox S., Cole S. et al., 2003, The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe, *MNRAS*, **346**, 78
- Hogg D., Eisenstein D., Blanton M. et al., 2004, Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies, astro-ph/0411197
- Holden D.J., 1966, An investigation of the clustering of radio sources, *MNRAS*, **133**, 225
- Holmberg E., 1974, Distribution of clusters of galaxies as related to galactic absorption, *A&A*, **35**, 121
- Hubble E., 1926, Extra-galactic nebulae, *ApJ*, **64**, 321
- Hubble E., 1929, A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, *Proceed. Nat. Acad. Sci.*, **15**, 168
- Hubble E., 1934, The distribution of extra-galactic nebulae, *ApJ*, **79**, 8
- Hubble E., 1936, Effects of red shifts on the distribution of nebulae, *ApJ*, **84**, 517
- Hubble E., 1937, *The Observational Approach to Cosmology*, The Clarendon Press, Oxford (68pp)
- Huber D., Pfenniger D., 2001, Long-range correlations in self-gravitating N-body systems, astro-ph/0105501
- Huchra J., Geller M., de Lapparent V. & Burg R., 1988, The Center for Astrophysics redshift survey, in *Large Scale Structures of the Universe*, IAU Symposium 130, (eds. J. Audouze, M.-C. Pelletan & A. Szalay), p.105
- Humason M.L., 1931, Apparent velocity-shifts in the spectra of faint nebulae, *ApJ*, **74**, 35
- Joeveer M. & Einasto J., 1978, Has the Universe the Cell Structure? in *The Large-Scale Structure of the Universe*, IAU Symposium 79 (eds. M. Longair, J. Einasto), p.241
- Jones B., Coles P., Martinez, 1992, Heterotopic clustering, *MNRAS*, **259**, 146
- Jones B., Martinez V., Saar E., Einasto J., 1988, Multi-fractal description of the large-scale structure of the universe, *ApJ*, **332**, L1
- Jones B., Martinez V., Saar E., Trimble V., 2004, Scaling laws in the distribution of galaxies, *Rev. Mod. Phys.*, **76**, 1211 [astro-ph/0406086]
- Joyce M., Anderson P.W., Montuori M., Pietronero L., Sylos Labini F., 2000, Fractal cosmology in an open universe, *Europhys. Lett.*, **50**, 416
- Joyce M., Montuori M., Sylos Labini F., 1999, Fractal correlations in the CfA2-south redshift survey, *ApJ*, **514**, L5
- Joyce M., Sylos Labini F., 2001, Luminosity density estimation from redshift surveys and the mass density of the universe, *ApJ*, **554**, L1
- Joyce M., Sylos Labini F., Gabrielli A., Montuori M., Pietronero L., 2005, Basic properties of galaxy clustering in the light of recent results from the SDSS, astro-ph/0501583
- Kaiser N., 1984, On the spatial correlations of Abell clusters., *ApJ*, **284**, L9
- Kant I., Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. English translation *Universal Natural History and Theory of the Heavens* (transl. S.L.Jaki) (Scottish Academic Press, Edingburgh, 1981) See also <http://www.mala.bc.ca/~johnstoi/kant1.htm>.
- Karachentsev I.D., 1966, Some statistical characteristics of superclusters of galaxies, *Astrofizika*, **2**, 307 (English translation in *Astrophysics*, **2**, 159)
- Karachentsev I.D., 1968, Average statistical characteristics of systems of galaxies and the problem of the existence of hidden virial mass, *Communications of Byurakan Observatory*, **39**, 76 (in Russian)
- Karachentsev I.D., 1975, *Acta Cosmologica*, **2**, 43
- Karachentsev, I.D., Lipovetskii, V.A., 1969, Absorbing material in clusters of galaxies, *Sov.Astronomy*, **12**, 909
- Karachentsev I. & Kopylov A., 1988, A cut of large-scale structure across the Coma supercluster, in: *Large Scale Structures of the Universe*, IAU Symposium 130, (eds.: J. Audouze, M.-C. Pelletan & A. Szalay), p.139
- Karachentsev I.D., Tikhonov N.A., 1994, New photometric distances for dwarf galaxies in the Local Volume, *A&A*, **286**, 718
- Karachentsev I.D. & Makarov D.A., 1996, The Galaxy motion relative to nearby galaxies and the local velocity field, *AJ*, **111**, 794
- bibitemkara97 Karachentsev I., Drozdovsky I., Kajsins S. et al., 1997, Revised photometric distances to nearby dwarf galaxies in the IC342/Maffei complex, *A&AS*, **124**, 559
- M
- Karachentsev I.D., Sharina M.E., Makarov D.I., 2002, The

- very local Hubble flow, *A&A*, **389**, 812
- Karachentsev I., Chernin A., Teerikorpi P., 2003a, The Hubble flow: why does the cosmological expansion preserve its kinematical identity from a few Mpc distance to the observation horizon? *Astrofizika*, **46**, 491
- Karachentsev I., Makarov D.I., Sharina M.E. et al., 2003b, Local galaxy flows within 5 Mpc, *A&A*, **398**, 479
- Karachentseva V.E. & Karachentsev I.D., 1998, A list of new nearby dwarf galaxy candidates, *A&AS*, **127**, 409
- Karachentseva V.E. & Karachentsev I.D., 2000, A supplementary list of southern nearby dwarf galaxy candidates, *A&AS*, **146**, 359
- Kerscher M., Szapudi I. & Szalay A.S., 2000, A comparison of estimators for the two-point correlation function, *ApJ*, **535**, L13
- Kiang T., 1967, On the clustering of rich clusters of galaxies, *MNRAS*, **135**, 1
- Kiang T., Saslaw W.C., 1969, The distribution in space of clusters of galaxies, *MNRAS*, **143**, 129
- Kilborn V.A., Webster R.L., Staveley-Smith L. et al., 2002, A Catalog of HI-Selected Galaxies from the South Celestial Cap Region of Sky, *AJ*, **124**, 690
- Klypin A.A., Kopylov A.I., 1983, The spatial covariance function for rich clusters of galaxies, *Sov. Astron. Lett.*, **9**, 41
- Klypin A., Einasto J., Einasto M., Saar E., 1989, Structure and formation of superclusters – X: Fractal properties of superclusters, *MNRAS*, **237**, 929
- Klypin A., Hoffman Y., Kravtsov A., Gottloeber S., 2003, Constrained Simulations of the Real Universe: the Local Supercluster, *ApJ*, **596**, 19
- Kopylov A., Kuznetsov D., Fetisova T. & Shvartsman V., 1988, Possible inhomogeneities in the Universe on scales of 100 – 300 Mpc from observations with the 6-meter telescope, in: *Large Scale Structures of the Universe*, IAU Symposium 130, (eds.: J. Audouze, M.-C. Pelletan & A. Szalay), p.129
- Kraan-Korteweg R.C. & Lahav O., 2000, The Universe behind the Milky Way *Astron. Astroph. Rev.*, **10**, 211
- Lambert J.H., 1761, *Kosmologischen Briefen* (Cosmological Letters), Ausburg. Printed in G. Jackisch: J.H. Lamberts Cosmologische Briefen (Akademie-Verlag, Berlin 1979)
- Landau L.D., Lifshitz E.M., 1958, *Statistical Physics* (Pergamon, London)
- Landau L.D., Lifshitz E.M., 1971, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Oxford)
- de Lapparent V. et al., 1988, The mean density and two-point correlation function for the CfA redshift survey, *ApJ*, **332**, 44
- Lebedev V., Lebedeva I., 1988, The spatial correlation functions of superclusters of galaxies, *Sov. Atron. Lett.*, **14**, 18
- Lemson G. & Sanders R.H., 1991, On the use of the conditional density as a description of galaxy clustering, *MNRAS*, **252**, 319
- Lerner E., 1986, Magnetic vortex filaments, universal invariants, and the fundamental constants. *IEEE Transactions on Plasma Science*; Special Issue on Cosmic Plasma, vol. PS-14, p. 690
- Limber D.N., 1953, The analysis of counts of the extragalactic nebulae in terms of a fluctuating density field, *ApJ*, **117**, 134
- Longair M.S., 1978, Personal view — the large scale structure of the Universe, in: *The Large-Scale Structure of the Universe*, IAU Symposium 79 (eds.: M. Longair, J. Einasto), p.451
- Loveday J., Peterson B.A., Efstathiou G., Maddox J.S., 1992, The Stromlo-APM redshift survey. I. The luminosity function and space density of galaxies, *ApJ*, **390**, 338
- Loveday J. et al. (SDSS collaboration), 2002, The Sloan Digital Sky Survey, *astro-ph/0207189*
- Lundmark K., 1924, The determination of the curvature of space-time in de Sitter's world, *MNRAS*, **84**, 747
- Lundmark K., 1927, Studies of anagalactic nebulae. *Medd. f. Astron. Obs. Uppsala*, No 30
- Luo X. & Schramm D.N., 1992, Fractals and cosmological large-scale structure, *Science*, **256**, 513
- Maccio A, Governato F., Horellow C., 2004, The signature of dark energy on the local Hubble flow, *astro-ph/0412583*
- Maddox J., 1987, The universe as a fractal structure, *Nature*, **329**, 195
- Madgwick D. et al., 2003, *MNRAS*, **344**, 847
- Mandelbrot B.B., 1975, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Paris & Montreal, Flammarion
- Mandelbrot B. B., 1977, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman, New York
- Mandelbrot B. B., 1982, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, New York
- Mandelbrot B. B., 1988, *Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies*, Springer, New York
- Mandelbrot B.B., 1989, The fractal range of the distribution of galaxies; crossover to homogeneity, and multifractals. In M. Mezzetti et al. (eds.), *Large Scale Structure and Motions in the Universe* (Kluwer Academic Publishers), p. 259
- Martinez V.J., Jones B.J.T., 1990, Why the universe is not a fractal, *MNRAS*, **242**, 517
- Martinez V.J., Lopez-Marti B., Pons-Borderia M.-J., 2001, Does the correlation length increase with the sample depth?, *ApJ*, **554**, L5
- Martinez V.J., Saar E., 2002, *Statistics of the galaxy distribution*, Chapman & Hall/CRC
- Mattila K., 1977, Photometry of the intergalactic optical surface brightness in the Coma cluster, *A&A*, **60**, 425
- Mellier Y., 1999, Probing the Universe with Weak Lensing, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **37**, 127
- Montuori M., Sylos Labini F., 1997, Angular correlations of galaxy distribution, *ApJ*, **487**, L21
- Moore B., Calcaneo-Roldan C., Stadel J., Quinn T., Lake G., Ghigna S., Governato F., 2001, Dark matter in Draco and the Local Group: Implications for direct detection experiments, *Phys. Rev.*, D64 063508
- Narlikar J., 1993, *Introduction to Cosmology*, 2nd edition (Cambridge University Press, Cambridge)
- Neyman J., Scott E.L., 1952, A theory of the spatial distribution of galaxies, *ApJ*, **116**, 144
- Norberg P., Baugh C.M., Hawkins E. et al., 2001, The 2dF Galaxy Redshift Survey: Luminosity dependence of galaxy clustering, *MNRAS*, **328**, 64

- Norberg P., Baugh C.M., Hawkins E. et al., 2002, The 2dF Galaxy Redshift Survey: The dependence of galaxy clustering on luminosity and spectral type, *MNRAS*, **332**, 828
- Ostriker J. P., Cowie L. L., 1981, Galaxy formation in an intergalactic medium dominated by explosions, *ApJ*, **243**, L127
- Paladin G., Vulpiani A., 1987, Anomalous scaling laws in multifractal objects, *Phys. Rep.*, **156**, 147
- Park C., Vogeley M.S., Geller M.J., Huchra J.P., 1994, Power spectrum, correlation function, and tests for luminosity bias in the CfA redshift survey, *ApJ*, **431**, 569
- Paturel G., Bottinelli L., Gouguenheim L., Fouqué P., 1988, New Determination of the Pole of a "Hypergalactic" Large Scale System, *A&A*, **189**, 1
- Paturel G., Bottinelli L., Di Nella H., Gouguenheim L., Teerikorpi P., 1994, Kinematics of the Local Universe: Completeness of the sample, *A&A*, **289**, 711
- Paturel G., Di Nella H., 1995, Galaxy distribution around the Local Super Cluster, *Astrophys. Letters and Comm.*, **31**, 337
- Paturel G., Bottinelli L., Di Nella H. et al., 1997, The Extragalactic Data Base: VII - Reduction of astrophysical parameters, *A&AS*, **124**, 109
- Peacock J.A., 1999, *Cosmological Physics*, Cambridge Univ. Press
- Peebles P.J.E., 1974a, The gravitational instability picture and the nature of the distribution of galaxies, *ApJ*, **189**, L51
- Peebles P.J.E., 1974b, A model for continuous clustering in the large-scale distribution of matter, *Astrophys. Space Sci.*, **31**, 403
- Peebles P.J.E., 1978, Large scale clustering in the Universe, in: Proc. of IAU Symp. N79 *The Large Scale Structure of the Universe*, eds.: M.S.Longair and J.Einasto, D.Reidel, Dordrecht, 1980, p.217
- Peebles P.J.E., 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton Univ. Press, Princeton
- Peebles P.J.E., 1988, Summary, in: *Large Scale Structures of the Universe*, IAU Symposium 130, (eds.: J. Audouze, M.-C. Pelletan & A. Szalay), p.495
- Peebles P.J.E., 1993, *Principles of physical cosmology*, Princeton Univ. Press, Princeton
- Peebles P.J.E., 2001, The Galaxy and Mass N-Point Correlation Functions: a Blast from the Past, in: *Historical Developments of Modern Cosmology* ASP Conf. Ser., eds.: V.J. Martinez, V. Trimble, M.J. Pons-Borderia; astro-ph/0103040
- Peebles P.J.E., 2002, From precision cosmology to accurate cosmology, astro-ph/0208037
- Peebles P.J.E., 2003, Open Problems in Cosmology, astro-ph/0311435
- Peebles P.J.E., Ratra B., 2003, The Cosmological Constant and Dark Energy, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 599 astro-ph/0207347, 2002.
- Penzias A., Wilson R., 1965, A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *ApJ*, **142**, 419
- Penzias A.A., Schraml J., Wilson R.W., 1969, Observational constraints on a discrete-source model to explain the microwave background, *Ap. J. Lett.*, **157**, L49
- Perdang J., 1990, Self-Gravitational Fractal Configuration, *Vistas in Astronomy*, **33**, 371
- Pietronero L., 1987, The fractal structure of the Universe: correlations of galaxies and clusters and the average mass density, *Physica A.*, **144**, 257
- Pietronero L., Kupers R., 1986, Stochastic approach to large scale clustering of matter in the universe, in: *Fractals in physics*, eds.: L. Pietronero, E. Tosatti (Elsevier Science Publ., Amsterdam), p. 319
- Pietronero L., Sylos Labini F., 1995, Cosmological Principle and the debate about Large Scale Structures distribution, astro-ph/9504013
- Pietronero L., Montuori M., Sylos Labini F., 1997, in: the Proc. of the Conference "Critical Dialogues in Cosmology", ed.: Turok, N., p.24 (World Scientific, Singapore, 1997)
- Refregier A., 2003, Weak Gravitational Lensing by Large-Scale Structure, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **41**, 645
- Ribeiro M.B., 1992, On modeling a relativistic hierarchical (fractal) cosmology by Tolman's spacetime. I. Theory, *ApJ*, **388**, 1
- Ribeiro M.B., 1993, On modeling a relativistic hierarchical (fractal) cosmology by Tolman's spacetime. III. Numerical results, *ApJ*, **415**, 469
- Rost F., 2004, Estimates of the fractal dimension and density of the Universe from the empirical mass-radius relation in cluster systems (in preparation)
- Rudnicki K., 1995, *The Cosmological Principles*, Jagiellonian University, Cracow
- Ruffini R., Song D.J., Taraglio S., 1988, The "ino" mass and the cellular large-scale structure of the Universe, *A&A*, **190**, 1
- Sandage A., 1961, The ability of the 200-inch telescope to discriminate between selected world models, *ApJ*, **133**, 355
- Sandage A., 1962, The change of redshift and apparent luminosity of galaxies due to the deceleration of the expanding universes, *ApJ*, **136**, 319
- Sandage A., 1986, The redshift-distance relation. IX, *ApJ*, **307**, 1
- Sandage A., 1987, The redshift-distance relation. IXa, *ApJ*, **317**, 557
- Sandage A., 1988, Observational tests of world models, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **26**, 561
- Sandage A., 1992, The Search for the Curvature of Space, *Physica Scripta*, **T43**, 7
- Sandage A., 1995a, Astronomical problems for the next three decades, in: *Key Problems in Astronomy and Astrophysics*, eds.: Mamaso A. and Munch G., Cambridge University Press
- Sandage A., 1995b, in *The Deep Universe*, eds. B. Binggeli, R. Buser (Springer)
- Sandage A., 1999, Bias Properties of Extragalactic Distance Indicators. VIII, H_0 from Distance-limited Luminosity Class and Morphological Type-Specific Luminosity Functions for Sb, Sbc, and Sc Galaxies Calibrated Using Cepheids, *ApJ*, **527**, 479
- Sandage A., 2004, *Breaking the code of cosmic evolution: An informal history of the Mount Wilson Observatory (1904-1950)*, Cambridge University Press

- Sandage A., Tammann G.A., Hardy E., 1972, Limits on the local deviation of the Universe for a homogeneous model, *ApJ*, **172**, 253
- Sandage A. & Tammann G.A., 1975, Steps toward the Hubble Constant. V. The Hubble constant from nearby galaxies and the regularity of the Local Velocity Field, *ApJ*, **196**, 313
- Saslaw W., 2000, *The distribution of the Galaxies – Gravitational Clustering in Cosmology* (Cambridge University Press 2000)
- Schulman L.S., Seiden P.E., 1986, Hierarchical structure in the distribution of galaxies, *ApJ*, **311**, 1
- Schwarz D., Starkman G., Huterer D., Copi C., 2004, Is the low- l microwave background cosmic? *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 221301 (astro-ph/0403353)
- Seeliger H. von, 1895, Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz, *Astron. Nachr.*, **137**, 9
- Selety F.J., 1922, Beiträgen zum kosmologischen Problem, *Annalen der Physik*, **68**, No 12, 281
- Selety F.J., 1923, Erwiderung auf die Bemergungen Einsteins über meine Arbeit "Beiträgen zum kosmologischen Problem", *Annalen der Physik*, **72**, No 17, 58
- Shane C.D., 1975, in: *Galaxies and the Universe*, eds.: A. Sandage, M. Sandage, J. Kristian (The University of Chicago Press, Chicago & London)
- Shane C.D., Wirtanen C.A., 1967, The Distribution of Galaxies, *Publ. Lick Obs.*, 22, Part 1
- Shapley H., 1943, *Galaxies* (The Blakiston Company)
- Shapley H., 1957, *The Inner Metagalaxy* Yale University Press, New Haven, 204pp
- Shapley H. & Shapley M.B., 1919, Studies based on the colors and magnitudes in stellar clusters. Fourteenth paper: Further remarks on the structure of the galactic system, *ApJ*, **50**, 107
- Shapley H., Ames A., 1932, A survey of the external galaxies brighter than the thirteenth magnitude, *Ann. Harvard Coll. Obs.*, **88**, No 2
- Shectman S.A. et al., 1996, The Las Campanas redshift survey, *ApJ*, **470**, 172
- de Sitter W., 1917, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, *MNRAS*, **78**, 3
- Sidharth B., 2000, The Fractal Universe, [physics/0004001]
- Smith R.W., 1983, The Great Debate Revisited, *Sky & Telescope* January 1983, p. 28
- Soneira R.M., Peebles P.J.E., 1977, Is there evidence for a spatially homogeneous population of field galaxies? *ApJ*, **211**, 1
- Soneira R.M., Peebles P.J.E., 1978, A computer model universe: simulation of the nature of the galaxy distribution in the Lick catalog, *AJ*, **83**, 845
- Stickel M., Lemke D., Mattila K., Haikala L.K., Haas M., 1998, Far-infrared emission of intracluster dust in the Coma galaxy cluster, *A&A*, **329**, 55
- Strauss M.A. et al., 1992, A redshift survey of IRAS galaxies. VII. The infrared and redshift data for the 1.936 Jansky sample, *ApJS*, **83**, 29
- Sylos Labini F., 1994, Isotropy, homogeneity, and dipole saturation, *ApJ*, **433**, 464
- Sylos Labini F., Amendola L., 1996, The Power Spectrum in a Strongly Inhomogeneous Universe, *ApJ*, **468**, L1
- Sylos Labini F., Pietronero L., 1996, Multifractality as a Link between Luminosity and Space Distribution of Visible Matter, *ApJ*, **469**, 26
- Sylos Labini F., Montuori M., Pietronero L., 1998, Scale-invariance of galaxy clustering, *Phys. Rep.*, **293**, 61
- Szalay A.S. & Schramm D.N., 1985, Are galaxies more strongly correlated than clusters? *Nature*, **314**, 718
- Teerikorpi P., 1975a, A note on the velocity–distance relationship for nearby galaxies and galaxy groups, *Observatory*, **95**, 105
- Teerikorpi P., 1975b, On the effect of the luminosity selection on the redshift–distance relationship, *A&A*, **45**, 117
- Teerikorpi P., 1982, Studies of the Hubble Law with emphasis of selection effects and Galactic absorption, *Rep. Ser., No. D4, Dep. Phys. Sci., Univ. Turku*,
- Teerikorpi P., 1997, Observational Selection Bias Affecting the Determination of the Extragalactic Distance Scale, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **35**, 101
- Teerikorpi P., 2001, Dark haloes in Karachentsev's sample of binary galaxies, *A&A*, **371**, 470
- Teerikorpi P., 2002, Dusty haloes of galaxies at intermediate redshifts, *A&A*, **386**, 865
- Teerikorpi P., 2004, Influence of a generalized Eddington effect on galaxy counts, *A&A*, **424**, 73
- Teerikorpi P., Bottinelli L., Gouguenheim L., Paturel G., 1992, Investigations of the local supercluster velocity field: I. Observations close to Virgo, using Tully-Fisher distances, and the Tolman-Bondi expanding sphere, *A&A*, **260**, 17
- Teerikorpi P., Hanski M., Theureau G., Baryshev Yu., Paturel G., Bottinelli L., Gouguenheim L., 1998, The radial space distribution of KLUN-galaxies up to 200 Mpc: incompleteness or evidence for the behaviour predicted by fractal dimension ≈ 2 ? *A&A*, **334**, 395
- Tegmark M., Hamilton A., Xu Y., 2002, The power spectrum of galaxies in the 2dF 100k redshift survey, *MNRAS*, **335**, 887
- Tegmark M., Blanton M., Strauss M., 2004, The three-dimensional power spectrum of galaxies from the Sloan Digital Sky Survey, *ApJ*, **606**, 702
- Theureau G., Hanski M., Ekholm T. et al., 1997, Kinematics of the Local universe. V. The value of H_0 from the Tully–Fisher B and D_{25} relations for field galaxies, *A&A*, **322**, 730
- Theureau G., Coudreau G., Hallet N. et al., 2004, Kinematics of the Local Universe XII. 21-cm line measurements of 586 galaxies with the new Nancy receiver, *A&A*(in press)
- Tikhonov A., Makarov D., Kopylov A., 2000, Investigation of the clustering of galaxies, clusters of galaxies and superclusters with the correlation gamma function, *Бюлл. Спец. астрофиз. обсерв.*, **50**, 39
- Tikhonov A., Makarov D., 2003, Correlation properties of galaxies in the Local Supercluster, *Astronomy Lett.*, **29**, 289
- Totsuji H. & Kihara T., 1969, The Correlation Function for the Distribution of Galaxies, *Publ. Astr. Soc. Japan*, **21**, 221
- Tully R.B., 1982, The local supercluster, *ApJ*, **257**, 389
- Tully R.B., 1986, Alignment of clusters and galaxies on scales up to 0.1c, *ApJ*, **303**, 25

- Tully R.B., 1987, More about clustering on scale of 0.1c, *ApJ*, **323**, 1
- Turner M., 2002a, Making sense of the new cosmology, astro-ph/0202008
- Turner M., 2002b, Dark Matter and Dark Energy: The Critical Questions, astro-ph/0207297
- Vasiliev N., 2004, Investigation of the methods of correlation analysis of large scale structures and their application to the 2dF survey, Graduate work, Astronomy Department, St.Petersburg University
- Vasiliev N., Baryshev Yu., Sylos Labini F., 2005, Large scale correlations in galaxy clustering from the VL samples of 2dFGRS, *A&A*(submitted)
- de Vaucouleurs G., 1953, Evidence for a local supergalaxy, *AJ*, **58**, 30
- de Vaucouleurs G., 1958, Further evidence for a local super-cluster of galaxies: rotation and expansion, *AJ*, **63**, 253
- de Vaucouleurs G., 1961, Recent studies of clusters and superclusters, *AJ*, **66**, 629
- de Vaucouleurs G., 1970, The case for a hierarchical cosmology, *Science*, **167**, 1203
- de Vaucouleurs G., 1971, The large-scale distribution of galaxies and clusters of galaxies, *PASP*, **83**, 113
- de Vaucouleurs G., 1972, in: *External Galaxies and Quasistellar Objects*, IAU Symp. No.44, ed.: D.S. Evans (Dordrecht; Reidel), p. 353
- de Vaucouleurs G. & de Vaucouleurs A., 1964, *Reference Catalogue of Bright Galaxies*, University of Texas Press, Austin
- de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Corwin Jr. H.G., 1976, *Second Reference Catalogue of Bright Galaxies*, University of Texas Press, Austin and London
- de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Corwin Jr. H.G., Buta R.J., Paturel G., Fouqu'e P., 1991, *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies*, Springer Verlag, New York
- de Vega H., Sánchez N., Combes F., 1996, Self-gravity as an explanation of the fractal structure of the interstellar medium, *Nature*, **383**, 56
- de Vega H., Sánchez N., Combes F., 1998, The fractal structure of the universe: a new field theory approach, *ApJ*, **500**, 8
- Uzan J.-P., 2002, The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations, hep-ph/0205340
- Vettolani et al., 1997, The ESO Slice Project (ESP) galaxy redshift survey, *A&A*, **325**, 954
- Walker A.G., 1944, Complete symmetric spaces, *Journal London Math. Soc.*, **19**, 219
- Warwick C., 1950, The effect of irregular absorption on galaxy distribution, *Proc. National Academy of Sciences*, **36**, 415
- Webster A., 1976, The clustering of radio sources—II The 4C, GB and MCI surveys, *MNRAS*, **175**, 71
- Webster A., 1977, The clustering of radio sources—II The Parkes 2700-MHz and Bologna B2 surveys, *MNRAS*, **179**, 511
- Weinberg S., 1977, *The First Three Minutes*, Basic Books, New York
- Wertz J.R., 1971, A Newtonian big-bang hierarchical cosmological model, *ApJ*, **164**, 227
- Wesson P.S., 1978, General-relativistic hierarchical cosmology: an exact model, *Ap. Sp. Sci*, **54**, 489
- Whiting A.B., 2003, The kinematic state of the local volume, *ApJ*, **587**, 186
- Wittman D.M., Tyson J., Kirkman D., Dell'Antonio I., Bernstein G., 2000, Detection of weak gravitational lensing distortions of distant galaxies by cosmic dark matter at large scales, *Nature*, **405**, 143
- Wu K., Lahav O., Rees M., 1999, The large-scale smoothness of the Universe, *Nature*, **397**, 225
- Zehavi I., Blanton M.R., Frieman J.A. et al., 2002, Galaxy clustering in early Sloan digital sky survey redshift data, *ApJ*, **571**, 172
- Zehavi I., Zheng Zh., Weinberg D.H. et al., 2004a, The luminosity and color dependence of the galaxy correlation function, [astro-ph/0408569]
- Zehavi I., Eisenstein D., Nichol R. et al., 2004b, The intermediate-scale clustering of luminous red galaxies, [astro-ph/0411557]
- Zeldovich Ya.B., Novikov I.D., 1984, *Relativistic Astrophysics*, **2**, The University of Chicago Press, Chicago
- Zlatev I., Wang L., Steinhardt P.J., 1999, Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 896 [astro-ph/9807002]
- Zwicky F., 1942, On the large scale distribution of matter in the universe, *Phys. Rev.*, **61**, 489
- Zwicky F., 1955, Statistics of clusters of galaxies, in *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (University of California Press), p.113
- Zwicky F., 1957, *Morphological Astronomy*, Springer-Verlag, Berlin
- Zwicky F., Herzog E., Wild P., Karpowicz M. & Kowal C.T., 1961-68, *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies* (Pasadena: California Institute of Technology)
- Zwicky F. & Rudnicki K., 1963, Area of the sky covered by clusters of galaxies, *ApJ*, **137**, 707