

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА УСТАВОК ЭЛЕМЕНТОВ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА РАТАН-600

О. Н. Шиврис, Ю. К. Постоенко, В. В. Трунов

Проведена модификация формул для вычисления координат элементов кругового отражателя радиотелескопа РАТАН-600, позволяющая построить алгоритмы эффективного расчета координат на малых ЭВМ (Э-100И, СМ-3, СМ-4). Дана рекомендация к вычислениям.

Modification of formulas for computations of element coordinates for the main mirror of the radiotelescope RATAN-600 is made, that allows to construct the algorithms for effective computation of the coordinates at small computers (Э-100И, СМ-3, СМ-4). Recommendations for the computations are given.

В работе [1] приведены основополагающие расчеты антенн переменного профиля, даны основные геометрические соотношения и преобразования координат. В работе [2] приведен полный набор формул и дана расчетная методика для получения уставок координат элементов главного зеркала. Эта методика в течение ряда лет успешно применяется для расчета установок на ЭВМ М-222 и М-4030, обеспечивая потребности наблюдений на РАТАН-600.

Однако по целому ряду соображений указанные расчеты целесообразно проводить на малых ЭВМ Э-100И, СМ-3 или СМ-4. Спецификой малых ЭВМ являются: малая длина машинного слова и программно-аппаратная реализация вычислений с двойной точностью и плавающей запятой, как следствие — низкая производительность (100—2000 команд/с) при точности 6—8 десятичных знаков. Для более эффективного счета уставок на малых ЭВМ необходим пересмотр алгоритмов счета с целью обеспечения минимальных требований к длине разрядного слова, сходимости алгоритмов при сохранении результирующей точности вычислений на уровне 10^{-5} .

1. Обзор исходных формул. Зеркало антенны переменного профиля состоит из многих одинаковых отражающих элементов (щитов), имеющих три степени свободы:

- поступательное радиальное смещение от исходной окружности R ;
- наклон к вертикали α ;
- поворот по азимуту β .

Для проведения наблюдений радиостанции под углом h к горизонту щиты выставляются так, чтобы была образована нужная для этого наблюдения поверхность [1]. При этом центры щитов располагаются по эллипсу и каждый щит имеет свое значение координат R , α и β .

Выражения координат отражающего элемента имеют вид [2]

$$R = \frac{[R_0(1 - \varepsilon^2) - P] \cos \varphi + \sqrt{P^2 - [(R_0 - P)^2 - R_0^2 \varepsilon^2] \sin^2 \varphi}}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad (1)$$

где R_0 — радиус исходной окружности; ε — эксцентриситет эллипса; $\varepsilon = \cos h$; P — фокальный параметр эллипса, который для получения максимальной отражающей поверхности определяется соотношением:

$$P = P_{\text{отт}} = R_{\text{max}} - L \cos h;$$

$$L = \sqrt{R_{\text{max}}^2 - R_{\text{min}}^2}$$

(для РАТАН-600 $L/R_{\text{max}} = 0.083189$); φ — азимут середины щита из центра исходной окружности;

$$\beta = \psi - \varphi - \arctg \left(\frac{\varepsilon \sin \psi}{1 + \varepsilon \cos \psi} \right). \quad (2)$$

Здесь ψ — азимут середины щита из фокуса, определяется из уравнения

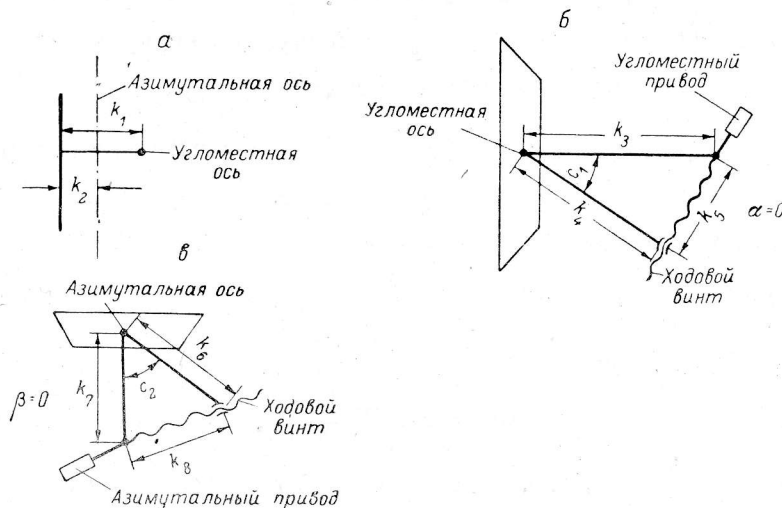
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - f/R},$$

где $f = R_0 - F$, F — фокусное расстояние эллипса; f — расстояние между фокусом и центром исходной окружности;

$$F = P/(1 + \varepsilon);$$

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{\sin h}{\sqrt{2(1 + \varepsilon \cos \psi)}} \right]. \quad (3)$$

Формулы (1), (2) и (3) представляют «чистые» глобальные координаты щитов с учетом преобразования фокальной системы координат в центральную R_0, f, φ .



Дополнительно учитываются «местные» преобразования координат каждого щита, удаление осей поворота по α и β друг от друга и от поверхности щита. Учет кинематических связей дает:

$$\alpha^* = \arctg (\operatorname{tg} \alpha / \cos \beta); \quad (4)$$

$$\beta^* = \arcsin (\cos \alpha \cos \beta); \quad (5)$$

$$R^* = R + k_1 (\sec \alpha^* - 1) + k_2 (\sec \beta^* - 1) \sec \alpha^*; \quad (6)$$

$$R_0 = R_{\max} - k_1 (\sec h/2 - 1), \quad (7)$$

где α^* , β^* и R^* — исправленные значения координат; k_1 и k_2 — кинематические константы (рисунок, а).

Заметим теперь, что диапазоны изменения всех трех координат α , β , R и параметра P малы, а именно:

$$\frac{|R_0 - R|}{R_0} < 4 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{|R_0 - P|}{R_0} < 0.1 R_{\max};$$

$$|\beta| < 0.1;$$

$$\left| \alpha - \frac{h}{2} \right| < 0.24 \text{ для } h \leq \frac{\pi}{2}.$$

В связи с этим возникают две возможности модификации формул:

- устранение из них разностей больших величин, которые приводят к избытку требуемой точности при счете;
- разложение громоздких преобразований, содержащих малые величины, в ряды или подбор подходящих по точности аппроксимаций, делающих счет более эффективным.

Первый путь позволяет снизить требования к точности счета на 3-4 порядка, второй — перейти к прямому вычислению рядов для функций, минуя обращение к тригонометрическим подпрограммам, где тригонометрические функции вычисляются также через ряды.

Желательно, кроме того, исключить, где это возможно, многоступенчатые подставки и преобразования тригонометрических аргументов, т. е. использовать промежуточные результаты счета непосредственно.

2. Модификация формул счета R . Выражение (1) получено решением квадратного уравнения

$$aR^2 + 2bR + c = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi; \\ b &= (P - E^2 R_0) \cos \varphi; \\ c &= -2R_0 [P - E^2 R_0]; \\ F^2 &= \sin^2 h. \end{aligned} \quad (9)$$

Вводим замену переменных $R = R_0 + r$ и преобразуем уравнение к виду

$$Ar^2 + 2Br + C = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= a; \\ B &= aR_0 + b; \\ C &= aR_0^2 + 2bR_0 + c. \end{aligned} \quad (11)$$

Решаем неявно это уравнение с использованием метода Ньютона:

$$r^{(i+1)} = r^{(i)} - \frac{Ar^{(i)2} + 2Br^{(i)} + C}{2(Ar^{(i)} + B)}, \quad (12)$$

где (i) — номер итерации. Или после подстановок:

$$r^{(i+1)} = -\frac{C - Ar^{(i)2}}{2(B + Ar^{(i)})}. \quad (13)$$

Сходимость итераций, т. е. уменьшение ошибки, происходит со скоростью [3]

$$\begin{aligned} \delta r^{(i)} = \frac{|r^{(i+1)} - r^{(i)}|}{r^{(i)}} &\leq \left| \frac{Ar}{2(B + Ar)} \right|^i \approx \left| \frac{A}{2B} r \right|^i; \\ A &\approx 1; \quad r/2B < 2 \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $|r| \leq r_{\max} < 4 \cdot 10^{-3} R_0$, и для обеспечения необходимой ошибки вычисления $\delta r^{(i)} \leq 10^{-5}$ в общем случае при $r^{(0)} = 0$ достаточно двух итераций. Однако если в качестве $r^{(0)}$ использовать значение установки соседнего щита, то достаточно одной итерации. Тогда получаем рекурсивную формулу вычислений:

$$r_{k+1} = -\frac{C_{k+1} - A_{k+1} r_k^2}{2(B_{k+1} + A_{k+1} r_k)}, \quad (15)$$

где k — номер щита.

Аналогичную формулу можно получить разложением точного решения уравнения (10) в ряд по $\frac{AC}{B^2}$:

$$\begin{aligned} r &= -\frac{B}{A} + \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}} = \frac{B}{A} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{AC}{B^2}} \right) = \frac{B}{A} \left(-1 + 1 - \frac{AC}{2B^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{AC}{B^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \left(\frac{AC}{B^2} \right)^3 + \dots \right) = \frac{C}{2B} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{A}{B} \left(\frac{C}{2B} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{B} \right)^2 \left(\frac{C}{2B} \right)^2 + \dots \right]; \\ AC/B^2 &\ll 1. \end{aligned}$$

Условие сходимости ряда аналогично (14), однако в реальных расчетах формула (13) более удобна, так как позволяет использовать естественную рекурсию вдоль поверхности. Кроме того, решение по методу Ньютона обладает внутренней устойчивостью по отношению к случайным отклонениям начальных условий и ошибкам округления.

Приведем окончательные выражения коэффициентов уравнения (10) с использованием подставок:

$$\begin{aligned} A &= E^2 + 4\varepsilon^2 u (1 - 2u); \\ B &= R_0 [1 + \varepsilon^2 (u_m - 2u) (1 - 2u)]; \\ C &= 4\varepsilon^2 R_0^2 u (u_m - u), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \sin^2 (\varphi/2); \\ u_m &= \frac{\varepsilon L - \Delta R}{\varepsilon^2 R_0}; \end{aligned}$$

$$\Delta R = R_{\max} - R_0.$$

Указанные подставки минимизируют требуемую разрядность вычислений за счет используемого вместо P параметра $L < 0.1 R_0$.

Значение корня u_m при вычислениях с малым ε следует ограничивать:

$$u_m = \begin{cases} \frac{\varepsilon L - \Delta R}{\varepsilon^2 R_0} & \text{при } \varepsilon^2 R_0 < \varepsilon L - \Delta R; \\ 1 & \text{при } \varepsilon^2 R_0 \geq \varepsilon L - \Delta R, \end{cases} \quad (17)$$

так как при $\varepsilon \approx 0.1$ корни исчезают. В выражениях (16) и (15) подставляются в цикле значения

$$u = u_k = \sin^2 (k\Delta\varphi/2),$$

где $\Delta\varphi = \pi/450$ — угловое расстояние между центрами щитов на исходной окружности.

3. Вычисление β . Угол β — это угол между касательной к кривой $R(\varphi)$ и нормалью к радиусу R в центре щита. Заменяем касательную на секущую, проходящую через центры двух соседних щитов. Ошибка такого приближения не превосходит $2 \cdot 10^{-5}$, в то время как необходимая точность составляет $20'' \approx 10^{-4}$.

В результате получаем простую формулу:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_{k+1} - r_{k-1}}{2R_0 \Delta\varphi} \left(1 + \frac{r_k}{R_0} \right). \quad (18)$$

4. Модификация формулы для α . Формулу (3) можно преобразовать к виду

$$\sin \alpha = \sin h \sqrt{\frac{P - \varepsilon (R \cos \varphi - f)}{2P}}.$$

Учитывая, что

$$P = (1 + \varepsilon) (R_0 - f),$$

получаем

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{h}{2} \left(1 + \varepsilon - \frac{R \cos \varphi - f}{R_0 - f} \varepsilon \right). \quad (19)$$

И, наконец, выделив малый член из последнего слагаемого в (19), получим:

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{h}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon R_0}{F} \left(2u + \frac{r}{R_0} (1 - 2u) \right) \right], \quad (20)$$

где $h/2$ — угол наклона нулевого (центрального щита). Формула учитывает относительные изменения α , в том числе содержит поправку от r .

5. Модификация корректирующих формул. Получены соотношения для вычисления $\operatorname{tg} \beta$ и $\sin^2 \alpha$. Вводим замену переменных:

$$T = \operatorname{tg} \beta; \quad S = \sin^2 \alpha$$

и выражения (4)—(6) приводим к этим переменным непосредственно, воспользовавшись разложениями по малому параметру T . После преобразований получаем:

$$z = \sin \alpha^* = \sqrt{S} (1 + 1/2 T^2 (1 - S)); \quad (21)$$

$$w = \sin \beta^* = T (1 - 1/2 T^2) \sqrt{1 - S}; \quad (22)$$

$$v = \frac{1}{2} w^2 (1 + (3/4) w^2); \quad (23)$$

$$r^* = r - k_1 + \frac{k_1 + k_2 v}{\sqrt{1 - S}}. \quad (24)$$

Промежуточные переменные z , w , v введены для сокращения записи в дальнейшем.

6. Перевод в углы поворота ходовых винтов. Окончательный результат расчета представляет собой массив уставок шитов, выраженных в углах поворота ходовых винтов или отсчетах шкал сельсинов. Формулы перевода исправленных координат в углы поворота ходовых винтов имеют вид [2]:

$$l = 36 (r_m - r^*); \quad (25)$$

$$A = 36 (\sqrt{k_3^2 + k_4^2 - 2k_3k_4 \cos(c_1 + \alpha^*)} - k_5); \quad (26)$$

$$B = 120 (\sqrt{k_6^2 + k_7^2 - 2k_6k_7 \cos(c_2 + \beta^*)} - k_8), \quad (27)$$

где l , A , B — установки радиальной, угломестной и азимутальной координаты соответственно; $l_m = R_{\max} - R_{\min}$ — длина хода радиального винта; c_1 , c_2 , k_1 , $k_2 \dots k_8$ — константы, имеющие кинематический смысл (рисунок, б, в). Значения констант следующие:

$c_1 = 20^\circ$; $c_2 = 28^\circ$; $k_1 = 445$ мм; $k_2 = 270$ мм; $k_3 = 1616$ мм; $k_4 = 1384$ мм; $k_5 = 586.84$ мм; $k_6 = 1011$ мм; $k_7 = 960$ мм; $k_8 = 479.39$ мм; $r_m = 1000$ мм.

С точки зрения счета формулы (26), (27) требуют упрощения. Для (26) применяем интерполяционную формулу Эрмита с двумя двукратными узлами [4]. При этом строится полином третьего порядка на отрезке $\alpha_0^* - \alpha_{\max}^*$, аппроксимирующий значения A в функции z из (21). После приведения полинома имеем

$$A = A_0 (a_0 + a_1 x + A_2 x^2 + a_3 x^3), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} x &= z - z_0; \\ a_0 &= y [\sin(h/2)]; \\ a_1 &= y' [\sin(h/2)]; \\ a_2 &= \left[y \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h \right) - a_0 - a_1 x_1 \right] / x_1^2; \\ a_3 &= \left[y' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h \right) - a_1 - 2a_2 x_1 \right] / x_1^2; \\ A_2 &= a_2 - a_3 x_1; \\ y(z) &= \sqrt{1 + D_1 z + D_2 \sqrt{1 - z^2}}; \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin h - \sin(h/2); \\ A_0 &= 36 \sqrt{k_3^2 + k_4^2} = 76595.54; \\ D_1 &= -\frac{2k_3k_4}{k_3^2 + k_4^2} \cos c_1 = -0.928520; \\ D_2 &= D_1 \operatorname{tg} c_1 = 0.337954; \\ z_0 &= \sin(h/2). \end{aligned}$$

Коэффициенты полинома определяются точными значениями функции (26) и ее первой производной на концах отрезка. Максимальная погрешность аппроксимации не превышает $0.5 \cdot 10^{-5}$. Точные значения y и y' вычисляются лишь в двух точках, используемых для однократного расчета коэффициентов полинома, значения уставок рассчитываются в цикле подстановкой $x = x_k$.

Выражение (27) легко упрощается в силу малости β^* . Аппроксимация трехточечным интерполяционным полиномом Лагранжа во всем диапазоне изменений β^* по аргументу w из (22) дает

$$B = b_0 + b_1 w + b_2 w^2, \quad (29)$$

где

$$b_0 = -0.2;$$

$$b_1 = 114190.5;$$

$$b_2 = -5769.8.$$

Погрешность приближения не хуже 10^{-5} рад.

7. Сводка результатов и рекомендации к вычислениям. Здесь не обсуждаются вопросы программирования, так как методы и средства программирования могут быть различными, однако формулы предыдущих разделов приводятся в том виде, в каком они должны фигурировать в программе. Здесь же дан краткий комментарий к расчетам.

Ввод внешнего параметра h и расчет основных параметров поверхности:

$$1^\circ. \quad \Delta R = k_1 [\sec(h/2) - 1];$$

$$R_0 = R_{\max} - \Delta R;$$

$$R_{\max} = 288470;$$

$$k_1 = 445.$$

$$2^\circ. \quad \varepsilon = \cos h;$$

$$F = (R_{\max} - \varepsilon L)/(1 + \varepsilon);$$

$$L = 23997.5.$$

$$3^\circ. \quad f = R_0 - F.$$

Расчет в цикле массивов r_k, T_k, S_k :

$$4^\circ. \quad u_m = \begin{cases} \frac{\varepsilon L - \Delta R}{\varepsilon^2 R_0} & \text{при } \varepsilon^2 R_0 > \varepsilon L - \Delta R; \\ 1 & \text{при } \varepsilon^2 R_0 \leq \varepsilon L - \Delta R; \end{cases}$$

$$u = u_k; \quad u_k = \sin^2(k\Delta\varphi/2);$$

$$\Delta\varphi/2 = 0.003490658; \quad G_0 = 4\varepsilon^2 R_0^2 u (u_m - u);$$

$$G_1 = R_0 [1 + \varepsilon^2 (u_m - 2u)(1 - 2u)]; \quad G_2 = E^2 + 4\varepsilon^2 u (1 - 2u);$$

$$u_0 = 0; \quad r_0 = 0; \quad r_k = r_{-k}.$$

5°. Окончание цикла по условию $u_k \leq u_m, r_k \leq r_m$ или $k \leq 110$, если предполагаются наблюдения одним сектором.

$$6^\circ. \quad T_k = \frac{r_{k+1} - r_{k-1}}{2R_0 \Delta\varphi} \left(1 + \frac{r_k}{R_0}\right);$$

$$(1/2) \Delta\varphi = 71.61972.$$

$$7^\circ. \quad S_k = S_0 + Q \left[u_k + \frac{r_k}{2R_0} (1 - 2u_k) \right];$$

$$S_0 = \sin^2(h/2),$$

$$Q = \frac{2\varepsilon R_0}{F} S_0.$$

Обратим внимание на то, что формулы 4°, 6°, 7° содержат некоторое число одинаковых членов. Поэтому при разработке программ с целью экономии времени вычислений в цикле может оказаться полезным введение дополнительных констант и внутренних переменных цикла. Переменную u_k желательно табулировать и вместо вычисления $\sin^2 \varphi_k$ в цикле использовать адресное или индексное обращение к таблице.

Расчет исправленных за кинематику массивов z, w, r^* :

$$8^\circ. \quad z_k = \sqrt{S_k} [1 + 0.5T_k^2 (1 - S_k)].$$

$$9^\circ. \quad w_k = T_k (1 - 0.5T_k^2) \sqrt{1 - S_k};$$

$$v_k = 0.5w_k^2 (1 + 0.75w_k^2).$$

$$10^\circ. \quad r_k^* = r_k - k_1 + \frac{k_1 + k_2 v_k}{\sqrt{1 - z_k}}.$$

Расчет массивов A, B, l , приведенных к углам поворота ходовых винтов:

$$A_0 = 76595.54;$$

$$D_1 = -0.928520;$$

$$D_2 = 0.337954;$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin h - \sin \frac{h}{2}.$$

11°.

$$y(z) = \sqrt{1 + D_1 z + D_2 \sqrt{1 - z^2}};$$

$$y'(z) = (D_1 - D_2 z / \sqrt{1 - z^2}) / [2y(z)].$$

12°. Коэффициенты полинома

$$a_0 = y[\sin(h/2)];$$

$$a_1 = y'[\sin(h/2)];$$

$$a_2 = \left[y\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h\right) - a_0 - a_1 x_1 \right] / x_1^2;$$

$$a_3 = \left[y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin h\right) - a_1 - 2a_2 x_1 \right] / x_1^3;$$

$$A_2 = a_2 - a_3 x_1.$$

13°. Цикл с вычислением A_k

$$x_k = z_k - z_0;$$

$$A_k = A_0 (a_0 + a_1 x_k + A_2 x_k^2 + a_3 x_k^3).$$

14°. B_k в цикле

$$B_k = b_0 + b_1 w_k + b_2 w_k^2;$$

$$b_0 = -0.2;$$

$$b_1 = 114190.5;$$

$$b_2 = -5769.8.$$

15°. l_k в цикле

$$l_k = d_0 - d_1 r_k^*;$$

$$d_0 = 36\,000;$$

$$d_1 = 36.$$

Для массивов $S_k, z_k, A_k; T_k, w_k, B_k$ и r_k, r_k^*, l_k может быть выделена общая память.

На печать или для промежуточного хранения выводятся h, f, A_k, B_k, l_k .

Литература

1. Большой пулковский радиотелескоп/С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина, О. Н. Шиврис. — Изв. ГАО, 1960, 164, с. 1—25.
2. Шиврис О. Н. Расчет установок для РАТАН-600. Препринт САО, 1975, с. 1—6.
3. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963, с. 53—76.
4. Гончаров В. А. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТТЛ, 1954, с. 64—68.

Поступила в редакцию 25.11.80